Уильям Дж. Баумоль,
Ричард Э. Квандт

ЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ОПТИМАЛЬНО НЕСОВЕРШЕННЫЕ РЕШЕНИЯ*[,1]

WILLIAM J. BAUMOL, RICHARD E. QUANDT
RULES OF THUMB AND OPTIMALLY IMPERFECT DECISIONS

Легко прийти к поспешному заключению, что широко распространенное использование эмпирических методов является наглядным признаком пренебрежения мастерством, проявляемого менеджерами. В этой статье мы, наоборот, будем доказывать, что эмпирические методы стоят в ряду наиболее эффективных средств для принятия оптимального решения. Далее мы исследуем в довольно общих понятиях, как могут строиться и оцениваться «хорошие» эмпирические методы. В статье приводится также иллюстративное применение анализа. Метод моделирования используется для определения относящихся к делу свойств ряда альтернативных оценочных эмпирических методов и для сравнения их характеристик как руководящих принципов для принятия решений в однопродуктовой монополистической фирме.

I. Оптимально несовершенные решения

Чем тщательнее разработан процесс принятия решений и чем дороже он в применении, и особенно в тех случаях, когда выбор решения не представляется жизненно важным, тем скорее можно

---

*Опубликовано в «American Economic Review» (1964. Vol. 54, N 2. March). Печатается по этому изданию.

[1] Авторы, профессора экономики Принстонского университета, хотели бы выразить свою признательность Национальному научному фонду, чья безвозмездная субсидия на изучение динамики данной фирмы дала им возможность завершить эту статью. Авторы также обязаны проф. Х. В. Куну и Х. Шапиро и Л. Сидору за их конструктивную консультацию и Ф. Фаулкесу за помощь в вычислениях. Бóльшая часть вычислений выполнена на компьютере CDC-1604.

рекомендовать приблизительные методы принятия решений. Так как все реальные решения принимаются в условиях несовершенной информации, вычисления с точностью до последнего знака после точки в любом случае бессмысленны. Легко сформулировать уместное (хотя и не очень полезное) предельное условие для того, что можно назвать *оптимально несовершенным решением*, которое требует, чтобы предельные затраты на сбор дополнительной информации или на более усовершенствованные вычисления равнялись их предельной (ожидаемой) общей отдаче. Дополнительные усилия в этом направлении могут быть объяснены ошибкой в расчете выгоды, или затрат, или тем, что один экономист удачно охарактеризовал как «иррациональная страсть к бесстрастной рациональности».

По-видимому, существует близкое сходство между данной позицией и точкой зрения проф. Саймона, что цель бизнесмена лучше может быть охарактеризована как «удовлетворение», чем некая максимизация. Саймон, как представляется, утверждает, что бизнесмены обычно даже не пытаются найти максимальные решения[2] именно потому, что они осознают ограниченную точность своей информации и чрезмерность затрат на тщательные вычисления, а потому вполне удовлетворяются приемлемыми решениями своих проблем.[3]

Для целей этой статьи мы определяем эмпирический метод как ряд принципов, описывающих процедуру принятия решения, со следующими характеристиками:

а) переменные, используемые в критериях решения, могут быть объективно измерены;

б) критерии решения могут быть изучены, и решения не зависят от суждения отдельного лица, принимающего решение;

---

[2] Для наших целей удобно определить различие между *максимальным* и *оптимальным* решениями. Первый из упомянутых терминов будет использоваться на протяжении данной статьи как обозначение точного решения, которое могло бы быть получено, если бы не было ограничения по данным или по затратам на вычисления, тогда как термин «оптимальное решение» означает идеальное приближение к максимальному решению.

[3] См., например, [5]. Саймон, конечно, говорит гораздо больше, нежели его гипотеза о том, что бизнесмены, по крайней мере подсознательно, устанавливают ряд критериев удовлетворительного образа действия и стремятся принимать любое решение, подходящее под эти критерии, что является как бы ограниченной максимизацией, только лишь с ограничениями и без максимизации!

в) как вывод из б: каждая логически возможная компановка переменных соответствует (обычно единственному в своем роде) определенному решению;

г) вычисление подходящего решения является простым, недорогим, может повторяться сколь угодно часто и может быть проверено высшими руководителями.

Процесс выбора решения, обладающий названными характеристиками, по-видимому, следует рассматривать как превосходный инструмент для принятия оптимально несовершенного решения, касающегося текущих и повторяющихся проблем.[4]

II. Оптимальные эмпирические методы. Проблемы определения

Даже концептуально классификация эмпирических методов не является столь легкой, как могло бы показаться, так как она неотъемлемо включает в себя задачи многомерности.

На первый взгляд может показаться достаточным просто сказать, что из двух равноценных (в смысле равенства операционных затрат) методов предпочтительнее тот, результаты которого *в среднем* ближе к подлинному максимуму. Но следует учитывать и некоторую степень рассеивания результатов. Фактически важны все характеристики плотности распределения ошибок. «Лучший» эмпирический метод может быть определен только при учете указанных характеристик и закрепления за ними подходящих весов.[5]

Отсюда, вероятно, следует, что не имеется никакого заранее готового механического способа определения — какой из двух методов предпочтительнее, если только один из них не является

---

[4] Следует отметить, что рабочая стратегия исследователя обычно нацелена на замену нынешних методов своего клиента некоторыми другими, по его мнению более удовлетворительными, *но которые тем не менее так же являются эмпирическими.*

Кроме того, даже в компьютерных имитационных моделях, где мир значительно упрощается, а сбор информации и усовершенствованные вычисления относительно дешевы и просты, во многих случаях оказалось невозможным и для искушенных составителей моделей управлять своими «фирмами» другими методами, нежели эмпирическими.

[5] Приписывание весов, конечно, эквивалентно определению соответствующей функции полезности.

тем, что могло бы быть названо «предпочтительным по Парето», т.е. не хуже ни по одной из своих характеристик и лучше по крайней мере по некоторым.[6]

Другая сложная проблема, присущая поискам оптимального эмпирического метода, возникает из необходимости определить диапазон подлежащих проверке альтернатив. В других типах решений эта задача иногда довольно проста, как в случае, когда решаемая проблема заключается в выборе численного значения переменной и где требуется не более чем определить граничные точки подлежащего рассмотрению интервала.

Но при выборе эмпирического метода мы должны выбирать не численные, а функциональные отношения. Например, объем запасов может регулироваться или обычным в бизнесе эмпирическим методом, $I = kS$, или простейшим теоретическим правилом накопления запасов, $I = \sqrt{aS}$ (где I — объем запасов, S — объем продаж за единицу времени, k и a — константы), или же может определяться любым из множества простых альтернативных выражений. К сожалению, трудно дать достаточно представительный, не говоря уже об исчерпывающем, перечень таких возможностей.[7]

III. Проблемы вычисления

Решающим шагом в определении оптимального эмпирического метода является вычисление ожидаемых последствий от принятия любого отдельного эмпирического метода. В идеале результатом этого этапа должны быть показатели плотности распределения ошибок, ожидаемых от любого из рассматриваемых

[6] Следует отметить, что возможность нетранзитивности есть одно из нежелательных следствий многомерного характера сравнения нескольких эмпирических методов. Это вполне аналогично парадоксу голосования и может возникнуть всякий раз, когда выбор эмпирического метода определяется решением: какой из претендующих эмпирических методов имеет большее количество предпочтительных характеристик. Для обсуждения парадокса голосования см. [1, р. 2–3].

[7] Это наблюдение тоже указывает на сложность, присущую вычислению оптимальных решений. Поскольку при выборе эмпирического метода выбирают функцию, а не значение переменной, проблема переносится в сложную область теории функциональных вычислений.

эмпирических методов, приближающихся к подлинным максимальным решениям.

В принципе эти плотности распределения могут быть определены аналитически, если известна структура системы и вероятностные распределения структурных переменных. Однако на практике такая процедура почти всегда невозможна. Во-первых, априорное определение вероятностного распределения для структурных переменных обычно исходит из наиболее рискованных предположений, которые редко выдерживают сопоставление с фактами. Во-вторых, даже при этих условиях аналитические методы определения ожидаемых эффектов эмпирического метода обычно оказываются исключительно сложными.

Это означает, что нужно обратиться к некоторым альтернативным методам проверки и вычисления. Методы моделирования, использующие условные наборы данных и проходящие «обкатку» на базе прошлых ситуаций, представляются вполне пригодными. Рассмотрев достаточное число модельных испытаний, аналитик сможет составить вполне адекватное представление о вероятной эффективности метода. К сожалению, накопленные образцы ситуаций, как правило, бывают очень далеки от реальности или же их структура смещена по отношению к структуре реальных ситуаций. Кроме того, чтобы оценить достоинства эмпирического метода в ряде случаев нужно иметь возможность сравнить его с истинным максимальным решением. Для достаточно сложных моделей это не всегда возможно.

Альтернативой моделированию является проверка метода на примере отобранных из прошлого опыта аналогичных случаев. Эта процедура снижает опасность выбора искусственных и излишне упрощенных или непоказательных ситуаций, но еще вероятнее, что такое моделирование упрется в трудности вычисления истинного максимума.[8]

---

[8] К счастью, эти проблемы не всегда столь уж серьезны. Например, в одном статистическом исследовании, основанном на действительных данных о приблизительных методах выбора схемы движения транспорта, вычисления были относительно просты и даже были получены определенные заключения, касающиеся того, какой из предложенных методов показал наилучшие результаты [3].

IV. Подходы к анализу оптимальности

Хотя, как это подчеркивалось в разделе II, не существует никакого систематического метода выявления всех эмпирических методов, которые требуется проверить в каждом отдельном случае, дело не так уж безнадежно. Многие функции удается довольно хорошо воспроизвести, по крайней мере на некоем ограниченном интервале значений независимых переменных, с помощью одной из немногих алгебраических функций, таких как уравнения конического сечения, многочлены умеренно низкого порядка, логарифмические функции и т. д.

Этот подход в сочетании с моделированием или статистической оценкой и процедурами проверки иногда может использоваться для выработки эмпирических методов, от которых можно ожидать достаточную степень приближения к подлинному максимуму. Это основной метод, использованный в данной статье.[9]

Прежде чем обратиться к применению указанного метода, уместно упомянуть другой перспективный подход к выбору эмпирического метода, основывающийся на использовании аксиоматических методов.[10] В действительности эта процедура означает отказ от поисков подлинного максимального решения. Она скорее определяет ряд условий приемлемости в форме аксиом, которые служат в качестве ограничений, сужающих диапазон возможных решений.[11] Например, при выборе достаточно простого

---

[9] Мы использовали его также в другой связи. Например, в неопубликованном исследовании проблемы запасов с помощью численных методов определяли самые дешевые уровни запасов для ряда альтернативных уровней продаж. Тогда было найдено, что экспоненциальное выражение $I = cS^b$ давало бы очень хорошие результаты, но при значении b, достаточно отличном от 0.5, из стандартно упрощенного выражения теории запасов $I = \sqrt{aS}$.

[10] Таким образом, можно толковать подход Чернова или Милнора к проблеме принятия решения как иллюстрацию выбора эмпирического метода [2, 4].

[11] Обратите внимание на сходство этого подхода с гипотезой удовлетворения Саймона [5]. Иногда ограничения допустимости бывают столь жесткими, что полностью исключают любое решение. Превосходной иллюстрацией является теорема возможности Эрроу [1, ch. 5]. В других случаях ограничения допустимости не будут столь жесткими, чтобы свести все возможности к единственному выбору. Тогда аксиоматический подход все еще может быть дополнен каким-нибудь видом вычислений оптимальности, который и позволит сделать выбор среди остающихся возможностей.

правила принятия решений можно предположить, что любой метод, не обладающий свойством транзитивности, совершенно неприемлем. При умелом отборе такого рода условий иногда можно даже прийти к уникальному решению, и если оно по форме достаточно просто, его можно принять в качестве искомого эмпирического метода.

V. Построение метода назначения цен

Попробуем теперь для иллюстрации применить нашу методику в любимой области микроэкономистов — ценообразование в розничной торговле. Эффективность ряда альтернативных правил ценообразования оценивалась с помощью моделирования, использующего значительное число искусственных, случайно порожденных функций спроса и затрат.

На этапе подготовки были выбраны для тестирования несколько альтернативных принципов ценообразования.

1. *Методы наценки к оптовой цене*, когда розничную цену образуют с помощью более или менее постоянной наценки к оптовой цене, что явно практикуется множеством заведений розничной торговли.

2. *Методы подражания*, когда каждое заведение поддерживает цену на уровне, установленном конкурентами. Эти методы соответствовали бы стандартному анализу ломаной кривой спроса и совместимы с такими реальными формами поведения в сфере розничной торговли, как сравнительные закупки.

3. *Методы обучения*, когда фирма поднимает цену и — в случае увеличения дохода — вновь поднимает ее, а в случае падения дохода понижает цену.

4. *Методы псевдомаксимизации*, в которых простые кривые спроса и затрат грубо подгоняются с помощью быстрых и недорогих приемов к последним полученным данным, и из этих простых кривых выводят приблизительную функцию прибыли, на основе нее и устанавливают формулу ценообразования (эмпирический метод), которая максимизирует значение этой приблизительной функции.

Объектом нашего анализа был последний из этих четырех типов правил принятия решений — методы псевдомаксимизации. Наш подход оказался совершенно непригодным для первых двух типов. Проверка методов постоянной розничной наценки требует некоторых знаний о соотношении между оптовыми ценами (на которые делают розничную наценку) и операционными затратами розничного торговца (которые определяют цену, максимизирующую прибыль). Если связь между оптовыми ценами и операционными расходами чисто случайна, то ясно, что отношение между величиной постоянной торговой наценки и максимизирующей ценой также должно быть чисто случайным.[12] В действительности эти два типа затрат (на оптовые закупки и на ведение торговли. — Прим. ред.), без сомнения, тесно переплетены, но, по-видимому, невозможно охватить взаимосвязь с помощью порождающего затраты механизма случайных чисел.

Мы не изучали методы ценообразования 2-го типа (подражательное ценообразование) по схожим причинам. Подражание предполагает, что есть кто-то, кому можно подражать, а так как мы проводили расчеты только для одной фирмы и не рассматривали явные олигопольные связи, то не было никакого способа исследовать такие методы.

Методы 3-го типа (обучение) можно было подвергнуть проверке. Мы не исследовали их с помощью методов моделирования, так как считали, что вычислений уже вполне достаточно для нашей настоящей цели — проиллюстрировать подход. Тем не менее несколько соображений о свойствах и результаты проверки методов обучения предложены в Приложении А.

Последний тип эмпирических методов, обсуждаемый далее в настоящей статье, есть так называемые методы псевдомаксимизации. Детали каждого метода зависят от характера функций, используемых для оценки функций затрат и спроса. Мы рас-

---

[12]Таким образом, можно утверждать, что проверяемый нами произвольно выбранный метод назначения цены (метод 2) является лучшим из доступных для анализа приближением к методу постоянной наценки. Можно прояснить причину нашей неспособности проверить метод постоянной наценки на простом примере, где предельные и средние затраты неизменны и, следовательно, равны. В стандартном выражении для предельной выручки, $MR = p(1 - 1/e)$, e — эластичность спроса. Следовательно, если цена p оптимальна, так что $MR = MC = AC$, мы получим $p(1-1/e) = AC$. Оптимальная наценка к средним затратам, таким образом, есть $1/(1-1/e)-1 = 1/(e-1)$. Этот хорошо известный результат показывает, что оптимальная розничная наценка может быть постоянной, только если e постоянна. Более того, величина постоянной розничной наценки будет случайным образом соотноситься с оптимальной ценой, пока e является произвольной величиной. Схожие аргументы возможны и когда MC не равно AC.

сматривали четыре возможных вида аппроксимирующих функций: линейную, квадратичную, логарифмическую и экспоненциальную. Конечно, возможны различные комбинации: кривые спроса могут быть линейными, а кривые затрат — логарифмическими и т. д. Таким образом было проверено 16 возможных комбинаций (и еще несколько комбинаций дополнительно). От большинства из них пришлось быстро отказаться, так как они требовали слишком сложных вычислений и не могли квалифицироваться как эмпирические методы. В итоге мы получили четыре возможные комбинации для тестирования.[13] Два других, несколько произвольных, «наивных» метода ценообразования были взяты как образцы минимальной эффективности.

Для гарантии, что наши методы достаточно просты и могут считаться эмпирическими, мы придерживались одного, довольно жесткого условия: принимающий решение ни в коем случае не должен был учитывать в своих вычислениях более двух точек на кривых спроса и затрат. Без сомнения, это (намеренно) ограничило нас самыми грубыми разновидностями аппроксимационных процедур, но мы хотели знать, насколько можно продвинуться с такими, в высшей степени несовершенными, средствами.

VI. Описание экспериментов: функции затрат и спроса

Прежде чем подробно описывать наши эксперименты, следует суммировать основные применявшиеся методы. Сначала порождаются в случайном процессе кривая спроса (средней выручки) для предпринимателя и его кривая общих затрат. Полученные кривые спроса и затрат рассматриваются как «подлинные», точно описывающие состояние дел. Предполагается, что предприниматель знает только две точки на каждой кривой. Он использует эмпирический метод, чтобы по двум парам точек вычислить цену, которую он может запросить на рынке. Мы можем определить по подлинным кривым спроса и затрат цену, максимизирующую прибыль, и максимальную величину прибыли, так же как его фактическую прибыль от цены, установленной с по-

[13]Можно было выбрать несколько других случаев. Например, для линейной функции затрат $D+Eq$ и функции спроса $p = A - Bq^{k-1}$ легко показать, что они приводят к правилу назначения максимальной цены $p = (kA - A + E)/k$.

мощью эмпирического метода. Сравнение фактической и максимальной прибыли дает оценку эффективности эмпирического метода.

Подробное обсуждение наших основных экспериментов для удобства можно разделить на три части: 1) методы, использовавшиеся для выявления функций спроса и затрат; 2) использовавшиеся эмпирические методы; 3) метод оценки эффективности различных эмпирических методов.

1. *Функция спроса (средней выручки).* Предполагается, что наш гипотетический продукт таков, что спрос на него равен нулю при цене p, большей или равной 21. Функция спроса дискретна (так же как функция затрат). Величина спроса определяется только для целочисленных значений p. График функции спроса начали строить от точки с координатами $p = 21$, $q = 0$ и затем вычисляли *прирост* спроса, соответствующий пошаговому сокращению цены. Приращения выбирались одним из двух методов:[14] 1) в сериях 1–5 приращения однородно распределяются по целым числам 1, ... , 64; 2) в серии 6 приращение t составляет $X_t + 2t$, где X_t однородно распределяется по целым числам 1, ... , 64. Заметим, что функция общей выручки не должна быть везде вогнутой и что при цене, равной нулю, величина спроса конечна.

2. *Функция общих затрат.* Функция спроса была получена путем привязки к каждой цене p некоторой величины $q = f(p)$. Функция затрат связывает каждое из этих q с выражением общих затрат $C = g(q)$. С нулевым уровнем продаж мы ассоциируем величину затрат, которая избирается из однородного распределения целых чисел от 1 до 64. Каждое последующее значение затрат, соотнесенное с более высоким уровнем продаж, получается прибавлением показателя прироста к предыдущему значению. В зависимости от серии приращение t: 1) выбирается из того же

[14] Указанные два метода порождают линейные и квадратичные функции спроса, т. е. в сериях 1–5 с каждым единичным приростом цены ожидаемое (среднее) уменьшение спроса составляет $(1 + 2 + \cdots + 64)/64 = 32.5$. Следовательно, ожидаемое значение dq/dp постоянно, а ожидаемая кривая спроса является линейной. В серии 6 ожидаемое приращение продаж при цене $p = 21 - t$ составляет $\Delta q = 32.5 + 2t$, так что мы можем взять $\Delta q/\Delta p = -32.5 - 2t$ (приближенно); и следовательно, ожидаемая функция спроса, полученная в серии 6, является квазиквадратичной. Подобные интерпретации действительны для функций затрат, которые использовались в различных сериях. Более подробная информация о природе этих функций дана в Приложении Б.

распределения, 2) кратно приращению, выбранному из того же распределения, или 3) вычисляется по формуле $Y_t + 8t$, где Y_t выбирается из того же распределения.

Очевидно, что максимальная прибыль и оптимальная цена легко определяются по этим функциям простой проверкой каждого из 22 возможных уровней цены (от $p = 0$ до $p = 21$) и вычислением в каждом случае соответствующего значения прибыли. Итоги шести экспериментов показывают, каким образом были получены приращения t для функций спроса и затрат. Допуская, что X_t и Y_t — случайные переменные, равномерно распределенные по целым числам 1, ... , 64, мы имеем:

Серия	Приращение функции спроса	Приращение функции затрат
1	X_t	Y_t
2	X_t	$4Y_t$
3	X_t	$8Y_t$
4	X_t	$Y_t + 8t$
5	X_t	$4Y_t + 8t$
6	$X_t + 2t$	Y_t

3. *Предпринимательские оценки функций спроса и затрат.* Для упрощения вычислений максимальной прибыли мы предположили, что предприниматель точно знает две точки на своей кривой спроса и две точки (с теми же показателями оси абсцисс, что и точки на кривой спроса) на кривой затрат. Предполагалось, что предприниматель вычислял свою псевдооптимальную цену по этим четырем точкам. Следует отметить, что, если псевдооптимальная цена p оказывалась дробным числом, ее округляли к наименьшему целому, большему, чем p. Прибыль предпринимателя при данном эмпирическом методе вычислялась затем по подлинным функциям спроса и затрат.

Ясно, что предпринимательские оценки функций спроса и затрат будут зависеть главным образом от того, какие две из множества возможных точек на кривых спроса и затрат по условию известны ему. Чтобы статистически оценить *среднюю или ожидаемую* эффективность эмпирического метода, экспериментатор должен затем представить предпринимателю одну за другой различные альтернативные пары точек и наблюдать его действия в каждой из этих ситуаций. В разделе VIII описано, каким образом подобные пары точек избирались для задач эксперимента.

VII. Эмпирические методы

Шесть исследовавшихся эмпирических методов по существу были избраны на основании их простоты (относительной). Не предпринималось попыток заранее выбрать методы, которые бы отличались достаточной рациональностью. В частности, первые два из описываемых ниже методов можно считать совершенно произвольными и неразумными. Эти «наивные методы» были введены только как образцы минимальной эффективности, по которым любой метод, не дающий результатов лучших, чем предлагаемые наивными методами, должен быть несомненно отвергнут.

Метод 1 (наивный). Постоянная цена. Независимо от расположения двух известных точек на кривой спроса и кривой затрат назначим цену $p = 11$, которая является средним значением для интервала цен. Строго говоря, это даже не эмпирический метод по нашему определению, так как отсутствует механизм решения, с помощью которого принимающий решение может подбирать свою неизменную цену исходя из объективно измеримых данных.

Метод 2 (наивный). Случайная цена. Выбираем цену из ряда целых чисел от 3 до 17, независимо от двух известных точек на кривых спроса и затрат.

Метод 3. Линейный спрос, линейные затраты. Подберем для двух известных точек на кривой спроса линейную функцию $p = a - bq$, а для двух точек на кривой общих затрат — $c = d + eq$. Если даны две пары точек $(p_1,\ q_1)$, $(p_2,\ q_2)$ и $(c_1,\ q_1)$, (c_2, q_2), оценки a, b, d и e получаются из выражений

$$\widehat{b} = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1},$$

$$\widehat{a} = p_1 + \widehat{b}q_1,$$

$$\widehat{e} = \frac{c_1 - c_2}{q_1 - q_2},$$

$$\widehat{d} = c_1 - \widehat{e}q_1.$$

Здесь, например, выражения для $\widehat{b}$ и $\widehat{a}$ получаются непосредственно поочередным исключением $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ из двух уравнений — $p_1 = \widehat{a} - \widehat{b}q_1$ и $p_2 = \widehat{a} - \widehat{b}q_2$. Предполагается, что предприниматель затем вычисляет свою псевдооптимальную цену, максимизируя прибыль на основании оценок, полученных из кривых спроса и затрат. Прибыль составляет

$$\pi = aq - bq^2 - d - eq,$$

а условие максимума

$$\frac{d\pi}{dq} = a - 2bq - e = 0.$$

Таким образом,

$$q = \frac{a-e}{2b}$$

и из нашего уравнения спроса[15]

$$p = a - b\left(\frac{a-e}{2b}\right) = \frac{a+e}{2}.$$

Благодаря методу порождения подлинной функции спроса $b > 0$ и условие второго порядка для максимума всегда удовлетворяется.

Метод 4. Линейный спрос, квадратичные затраты. Здесь функция спроса оценивалась так же, как и в методе 3. Затраты описывались квадратичной функцией $c = dq + eq^2$. Значения коэффициентов d и e вычислялись с помощью выражений

$$\hat{e} = \frac{c_1 q_2 - c_2 q_1}{q_1 q_2 (q_1 - q_2)},$$

$$\hat{d} = \frac{1}{q_1}\left[c_1 - \hat{e} q_1^2\right].$$

[15]Служащему, фактически производящему подсчеты эмпирическим методом, не нужно решать уравнения спроса и затрат для определения цены. Из нашего следующего уравнения мы имеем $p = (a+e)/2$, и, подставляя выражения для a и e, мы получаем $p = (p_1 q_2 - p_2 q_1 + c_2 - c_1)/2(q_2 - q_1)$. Это уравнение позволяет определить цены непосредственно по данным о ценах, затратах и продажах. То же справедливо и для других методов.

Максимизируя прибыль

$$\pi = aq - bq^2 - dq - eq^2,$$

получим условие первого порядка:

$$\frac{d\pi}{dq} = a - 2bq - d - 2eq = 0,$$

откуда

$$q = \frac{a-d}{2(b+e)}, \quad p = a - b\left(\frac{a-d}{2(b+e)}\right).$$

Условие второго порядка:

$$2(b+e) > 0.$$

Мы наблюдали следующие правила:

а) при невыполнении условий второго порядка (что возможно, поскольку e может быть отрицательным) назначалась цена $p = 21$;[16]

б) если вычисленное оптимальное количество не положительно, назначалась цена $p = 21$;

в) предельные затраты для возможного интервала продаж могли быть только положительными.

Метод 5. Линейный спрос, логарифмические затраты. В методе 5 кривая спроса была получена так же, как и ранее. Но функция затрат на этот раз была

$$c = dq + e\log(q+1).$$

По двум значениям функции затрат вычислялись коэффициенты d и e:

$$\hat{e} = \frac{c_1q_2 - c_2q_1}{q_2\log(q_1+1) - q_1\log(q_2+1)},$$

[16] Есть основания считать, что эти правила и соответствующие правила для методов 5 и 6 внесли некоторое предубеждение против указанных методов в нашу окончательную оценку. Ведь при $p = 21$ объем продаж равен нулю и прибыли отрицательны; можно предположить, что в подобных случаях, когда метод не срабатывает, даже служащий средних способностей выполнил бы эту работу лучше; по-видимому, было несправедливым выбрать для этих методов правила, которые обеспечивают только нулевую прибыль.

$$\widehat{d} = \frac{1}{q_1}\left[c_1 - \widehat{e}\log(q_1+1)\right].$$

Максимизация функции прибыли

$$\pi = aq - bq^2 - dq - e\log(q+1)$$

дает условие первого порядка:

$$\frac{d\pi}{dq} = a - 2bq - d - \frac{e}{q+1} = 0,$$

откуда

$$q = \frac{(a-d-2b) \pm \sqrt{(a-d-2b)^2 + 8b(a-d-e)}}{4b}.$$

Условие второго порядка:

$$-2b + \frac{e}{(q+1)^2} < 0.$$

При данном вычислении возможны трудности, для разрешения которых были приняты следующие правила.

а) Двойные корни. Если некое q было отрицательным, назначалась цена $p = 21$. Если значение корня было положительным, но не удовлетворялось условие второго порядка, то назначалась цена $p = 21$, дающая нулевые продажи.

б) Если корни были комплексными, назначалась цена $p = 21$.

в) Для действительных значений цена $p = 21$ назначалась либо в случае, когда оба корня были отрицательными, либо когда единственный положительный корень соответствовал минимуму.

При положительном q^*, соответствующем максимуму функции прибыли, предприниматель назначал цену $p = a - bq^*$.

Метод 6. Гиперболический спрос, квадратичные затраты. В методе 6 функция спроса описывалась выражением $p = a - b/q$; ее коэффициенты вычислялись по двум «наблюдаемым» точкам:

$$\widehat{b} = -\frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} q_1 q_2$$

и

$$\widehat{a} = p_1 + \frac{\widehat{b}}{q_1}.$$

Функция затрат оценивалась как и в методе 4.

Тогда функция прибыли

$$\pi = aq - b - dq - eq^2.$$

Максимизируя, получаем

$$\frac{d\pi}{dq} = a - d - 2eq = 0,$$

дающее

$$q = \frac{a-d}{2e},$$

и условие второго порядка теперь

$$e > 0.$$

В случае невыполнения условия второго порядка или если псевдооптимальное q не было положительным, выбиралась псевдооптимальная цена $p = 21$. В других случаях предприниматель назначал цену

$$p = a - b\left(\frac{2e}{a-d}\right).$$

VIII. Методика тестирования

Как указывалось ранее, методы 1 и 2 дают результаты, независимые от определенной информации, которая, как предполагается, непосредственно доступна предпринимателю. Поэтому один и только один эмпирический метод обеспечивается каждым из двух указанных методов для любой случайно полученной пары функций спроса и затрат.

Это не относится к методам 3–6. Решение, получаемое на основе этих методов, зависит от того, какие две из 22 возможных точек на кривых спроса и затрат используются в построении кривых спроса и затрат.

Мы допустили, что нулевые продажи, так же как объем продаж, соответствующий нулевой цене, предприниматель никогда не использует в своих вычислениях. Следовательно, остаются

20 точек, с учетом «природы» которых предприниматель выбирает две. Для оценки действия эмпирического метода мы вычислили его решение для каждой возможной пары точек из всех 20. Существуют 190 таких пар и 190 значений показателя прибыли, соответствующих единственной комбинации «истинных» функций спроса и затрат, т. е. единичному эмпирическому методу. Для каждой отдельной комбинации «истинных» функций спроса и затрат мы, таким образом, вычислили по методам 1 и 2 показатели прибыли и каждый из них сравнивали со *средним* показателем прибыли, рассчитанной по методам 3–6.

Всего было получено 24 различные комбинации функций истинного спроса и затрат для каждой серии.

IX. Результаты вычислений

В таблице приведены результаты вычислений. Таблица разделена на шесть разделов, каждый соответствует одной из шести серий, и на семь граф, соответствующих подлинной максимизации прибыли и шести эмпирическим методам. В каждом разделе, соответствующем определенной серии вычислений, первая строка содержит среднюю прибыль (для 24 случаев) при подлинной максимизации прибыли и при различных эмпирических методах. Вторая строка содержит среднюю прибыль в процентном отношении к максимальной прибыли. В третьей строке — стандартное отклонение математических ожиданий прибыли для 24 случаев. В четвертой строке — стандартное отклонение, деленное на среднюю прибыль. В пятой строке — стандартное отклонение по 24 случаям разности между максимальной прибылью и достигнутой средней прибылью (мера *надежности* метода в аппроксимировании максимума), и, наконец, последняя строка показывает наименьшую прибыль, встретившуюся в 24 случаях.

Цифры в таблице показывают, что методы 2 и 6 могут быть сразу же исключены как неэффективные. Метод 2 неплохо работает в серии 1, но значительно хуже в большинстве остальных серий. Причина в том, что из-за сдвига вверх функции затрат в сериях 2–5 средняя оптимальная цена в этих сериях выше, а среднее отклонение (средняя ошибка) для метода 2, использующего случайные цены, имеет тенденцию к увеличению в последующих сериях. Гиперболическая функция спроса в методе 6 плоха, потому что функция подлинного спроса является псевдо-

Сводка результатов

	Максимальная прибыль	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6
Серия 1							
Средняя прибыль	3398.2	3204.7	2350.8	2980.9	2971.8	2985.0	223.5
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1.000	0.943	0.692	0.877	0.875	0.878	0.066
Стандартное отклонение	535.4	500.7	803.6	459.6	458.6	459.0	290.7
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.158	0.156	0.342	0.154	0.154	0.154	0.130
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	190.3	890.5	168.0	152.0	169.4	441.8
Наименьшая прибыль	—	2016.0	483.0	1925.6	1951.6	1928.5	−55.0
Серия 2							
Средняя прибыль	2446.5	2091.1	991.3	1934.4	1898.6	1947.1	−0.9
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1.000	0.855	0.405	0.791	0.776	0.796	—
Стандартное отклонение	614.2	554.8	1151.4	516.8	565.9	521.4	220.8
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.251	0.265	1161	0.267	0.298	0.268	0.237
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	321.4	1271.1	212.4	220.5	202.6	481.7
Наименьшая прибыль	—	870.0	−1770.0	1001.5	1118.1	1040.9	−220.0

Продолжение таблицы

	Максимальная прибыль	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6
Серия 3							
Средняя прибыль	1340.8	606.2	−821.3	741.3	650.2	770.7	−181.7
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1.000	0.452	—	0.553	0.485	0.576	—
Стандартное отклонение	720.2	717.6	1747.1	618.8	752.8	587.3	205.8
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.537	1.184	2.127	0.835	1.158	7.62	1.133
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	489.7	1849.8	273.4	340.1	259.3	601.7
Наименьшая прибыль	—	−658.0	−4774.0	118.8	−658.7	129.0	−440.0
Серия 4							
Средняя прибыль	3048.9	2764.7	1617.5	2519.9	2608.4	2541.0	522.5
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1000	0.907	0.531	0.826	0.856	0.833	0.171
Стандартное отклонение	550.9	500.7	1168.1	450.0	471.4	451.9	251.4
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.181	0.181	0.722	0.179	0.181	0.178	0.481
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	277.3	1275.7	212.8	169.4	204.2	428.6
Наименьшая прибыль	—	1576.0	−1037.0	1661.7	1708.9	1673.2	−25.7

Продолжение таблицы

	Максимальная прибыль	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6
Серия 5							
Средняя прибыль	2186.3	1651.1	258.0	1574.7	1639.7	1608.0	26.7
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1.000	0.755	0.118	0.720	0.750	0.736	0.012
Стандартное отклонение	610.1	554.8	1567.5	472.3	561.4	480.0	205.9
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.279	0.336	6.076	0.300	0.342	0.298	7.867
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	380.3	1688.3	272.9	226.0	257.6	469.6
Наименьшая прибыль	—	430.0	−3290.0	913.7	791.5	983.3	−220.0
Серия 6							
Средняя прибыль	4337.8	4194.7	3287.1	4152.3	4104.0	4155.0	311.1
Средняя прибыль / максимальная прибыль	1.000	0.967	0.758	0.957	0.946	0.958	0.072
Стандартное отклонение	517.1	500.5	883.2	485.6	487.6	487.6	498.4
Стандартное отклонение / средняя прибыль	0.119	0.119	0.269	0.117	0.119	0.117	1.602
Стандартное отклонение (максимальная прибыль минус средняя прибыль)	—	125.0	853.4	73.0	126.0	73.6	614.3
Наименьшая прибыль	—	3006.0	1167.0	2969.2	2958.5	2967.2	−32.6

линейной (за исключением серии 6) в том смысле, что, если при построении функции спроса мы замещаем случайное значение показателя его ожидаемым значением, мы получаем ряд точек, лежащих на прямой линии. Фактически различные порожденные функции спроса можно визуально оценить как линейные с достаточной степенью точности. Подгонка гиперболической функции к линейному ряду точек (особенно только по двум точкам!) дает плохие результаты.

Относительно хорошее действие наивного метода 1 (особенно в серии 1) не столь необъяснимо, как может показаться. Это в значительной степени объясняется природой наших моделированных функций затрат и спроса, как показано в Приложении Б. Поразительная прибыльность метода 1 свидетельствует о некоторой смещенности в нашей имитационной модели; она послужила основой для анализа в приложениях.

Методы 3–5 включают линейные функции спроса и линейные, квадратичные и логарифмические функции затрат соответственно. Так как функция общих затрат порождается по существу так же, как и функция спроса, она является псевдолинейной (за исключением серий 4 и 5, где она псевдоквадратичная), и мы на основании предыдущих аргументов ожидали от метода 3 наилучших результатов в сериях 1–3 и 6. Если учитывать среднюю прибыль, это оказалось не совсем так, однако по любому критерию сложно провести различие между эффективностью методов 3 и 5. Три этих метода дают высокую среднюю прибыль, методы 3 и 5 обеспечивают наибольший результат в сериях 1–3 и 6. В сериях 4 и 5 функция затрат псевдоквадратичная, а метод 4 дал лучшие показатели средней прибыли, как и должно было быть. По другим критериям они тоже дают вполне хорошие результаты. За исключением метода 6 — по данным методов 3–5 — значения прибыли показывают наименьшие стандартные отклонения, в большинстве случаев *меньшие, чем стандартные отклонения численных значений подлинной оптимальной прибыли.* В большинстве случаев (кроме серии 3, метод 4) стандартное отклонение, деленное на среднюю прибыль, дает тот же порядок значений для методов 3–5, как для максимальных значений прибыли. Стандартное отклонение разности между средней и максимальной прибылью является наименьшим (за одним незначительным исключением) для методов 3–5 и изменяется от серии к серии таким образом, что препятствует однозначной оценке трех данных методов. Наименьшие значения прибыли, полученные по методам 3–5, тоже относительно высоки, благодаря чему эти методы легко превосходят альтернативные эмпирические методы, кроме нескольких случаев.

Таким образом, методы 3–5, по-видимому, являются лучшими из наших эмпирических методов, оценивать ли их по изменяемости размера прибыли либо на основании критерия максимума. По простоте и дешевизне вычислений метод 3 является наилучшим, поскольку использует только линейные функции. Стоит отметить, что простейший метод оказывается лучшим и по другим критериям.

В заключение можно упомянуть, что эффективность указанных эмпирических методов в получении средней прибыли просто замечательна, если учесть, что вычисления прибыли основывались на функциях спроса и затрат, построенных только по *паре* точек. Так как кривые спроса и затрат являются псевдолинейными или псевдоквадратичными в описанном смысле, резонно было бы ожидать хорошего приближения к подлинным функциям, когда исходные точки лежат относительно далеко друг от друга. Однако мы ожидали довольно слабого приближения, когда точки лежат близко друг к другу. Поэтому в целом показатели средней прибыли (являющиеся средними значениями «хороших» и «плохих» оценок) удивительно хороши даже в серии 3. Хотя взятые как процентное отношение к максимальной прибыли показатели методов значительно ухудшились в серии 3 (например, метод 3 дал в среднем в этой серии лишь 55.3% максимальной прибыли), абсолютное расхождение между максимальной прибылью и средней прибылью осталось по существу неизменным в трех сериях; разница между показателями максимальных прибылей и прибылей по методу 3 составила 417.31 в серии 1, 512.09 в серии 2 и 599.70 в серии 3.

X. Заключительные комментарии

Главная задача этой статьи — открыть новую область исследований, а не представить какие-либо окончательные выводы. Мы обсудили общие соображения, которые следует учитывать при выборе эффективных эмпирических методов. Как практические, так и аналитические сложности, присущие данной проблеме, были довольно подробно исследованы. Вследствие этих проблем и относительной топорности наших приемов даже ограниченные результаты этого исследования следовало бы признать в известном смысле замечательными. Можно считать, что тесты, использованные в анализе, продемонстрировали пригодность для ранжирования альтернативных эмпирических методов.

Мы отдаем себе полный отчет в том, что наши результаты в значительной степени зависят от характера частотного распределения, свойственного нашим генераторам случайных чисел, от выбранных для тестирования методов и от методов построения функций затрат и спроса. Будущие экспериментаторы могли бы проверить ряд альтернатив, включая функции спроса и затрат со случайными ошибками наблюдения и сдвигами функций затрат и спроса. Метод обучения, описанный в Приложении А, по-видимому, заслуживает дальнейшего исследования, и нужно рассмотреть альтернативные методы моделирования, использованные в данной статье. Можно было бы предпринять эмпирическое изучение методов, применяемых в промышленности. Очевидно, что главным нашим результатом является ряд предложений для дальнейшего анализа, а также некоторая степень уверенности в том, что данное направление исследований способно привести к содержательным выводам.

Тем не менее остается вопрос: каким образом можно использовать результаты такого исследования? Конечно, на основании нашего искусственного и фрагментарного экспериментирования не может быть предложено никаких серьезных рекомендаций для кого-либо, кто на практике отвечает за назначение цен. Может быть, перспективнее обратиться к изучению множества разнообразных моделей. Тогда стало бы возможно для любого эмпирического метода выделить типы ситуаций, в которых от него можно ожидать относительно хорошего результата. Если это проделать с достаточной точностью и тщательно разработать характеристики, чтобы их можно было исследовать, вполне вероятно, что результаты удастся приложить к реальным проблемам принятия решения.

Во всяком случае мы пытались проиллюстрировать удивительно сложный характер проблемы, о которой хоть и часто упоминали, но которую никогда прежде не делали предметом систематического изучения. Предоставляем судить читателю, являются ли эти начальные результаты обнадеживающими.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метод обучения

Мы не моделировали ситуации, в которых получающий прибыль методом обучения ищет свой путь к оптимальным условиям. Причина отчасти в том, что наша имитационная модель непригодна для исследования этого метода. При отсутствии сдвигов функции прибыли хорошо разработанный метод уверенно достигает оптимума, как это вскоре будет показано. Накопленный опыт аналогичных математических операций, таких как метод Ньютона для приблизительного определения корней уравнения, позволяет предположить, что они будут обладать довольно высокой сходимостью. Только модели с частыми и непредсказуемыми сдвигами функций затрат и прибыли пригодны для серьезного испытания метода обучения, потому что только так мы можем увидеть, движется ли он к оптимуму быстрее, чем устаревает прошлая информация, использованная для его построения. Хорошая имитация метода обучения, построенная на функции фиксированной прибыли, в длительной перспективе должна почти наверняка оказаться эффективнее, нежели любые другие типы эмпирических методов, но будет ли так происходить на практике, полностью зависит от изменчивости соответствующих функций.

Для моделей метода обучения процедуры ценообразования обычно воспроизводят с помощью дифференциальных уравнений. Однако эти уравнения должны быть по крайней мере второго порядка.[17] Такой метод констатирует, что изменение в цене с данного периода до следующего зависит от предшествующего изменения цены и результирующего изменения прибыли. Тогда символически мы имеем $p_{t+1} - p_t = f(p_t - p_{t-1}, \pi_t - \pi_{t-1})$, где p_t и π_t соответственно представляют цену и прибыль в период t и где мы можем исключить значение прибыли из уравнения, подставляя в функцию прибыли $\pi = g(p_t)$.

[17]Модель, воспроизводящая ньютоновский метод, должна быть третьего *порядка. Чтобы найти точку максимума* π, ищется значение p, при котором $\Delta\pi/\Delta p$ приближается к нулю. Для этого берут два последовательных значения $(\Delta\pi/\Delta p)_t$ и $(\Delta\pi/\Delta p)_{t-1}$ и подбирают по этим данным линейное выражение $\Delta\pi/\Delta p = a + bp$. Значение p, при котором $a + bp = 0$, является приближением к оптимальной цене, и соответствующее численное значение предельной прибыли берется как $(\Delta\pi/\Delta p)_{t+1}$ для следующей итерации. Следовательно, в $\Delta\pi/\Delta p$ мы имеем отношение второго порядка, которое можно выразить как $(\Delta\pi/\Delta p)_{t+1} = f[(\Delta\pi/\Delta p)_t, (\Delta\pi/\Delta p)_{t-1}]$, но так как $(\Delta\pi/\Delta p)_t = (\pi_{t+1} - \pi_1)/(p_{t+1} - p_t)$, это отношение является отношением третьего порядка при наших начальных переменных π_t и p_t. Другими словами, каждая итерация такого ньютоновского метода требует данных *трех* наблюдений прибыли и цены, $\pi_{t-1}, \pi_t, \pi_{t+1}, p_{t-1}, p_t, p_{t+1}$.

Это уравнение будет, как правило, нелинейным, так как функция прибыли обычно является нелинейной; действительно, так и должно быть, чтобы (при отсутствии ограничений) существовала какая-либо цена, максимизирующая прибыль.

Источником нелинейности будет и то, что знак изменения цены в следующем периоде зависит как от знака изменения цены в последнем периоде, так и от знака изменения прибыли в последнем периоде. Точнее, мы настаиваем на том, что при возрастании прибыли изменение цены в следующем периоде будет иметь тот же знак, что и для последнего периода. Но если прибыль упала, изменение цены в следующем периоде будет иметь знак, противоположный знаку ее изменения в предшествующем периоде.

Простым соотношением, отвечающим этому требованию, является

$$p_{t+1} - p_t = k\frac{\pi_t - \pi_{t-1}}{p_t - p_{t-1}}$$

при $p_t \neq p_{t-1}$ и $p_{t+1} - p_t = 0$, иначе говоря, где k — параметр скорости согласования. Однако это лишь одно из многих возможных уравнений, которые пригодны для описания метода обучения. Подход с помощью моделирования может быть здесь и не нужен, так как результаты такого метода могут быть установлены аналитически, по крайней мере в некоторых случаях, как это сейчас будет показано.

I. *Дискретная модель с квадратичной функцией прибыли.* Определим Δp_t как $p_t - p_{t-1}$ и зададим функцию прибыли:

$$\pi_t = ap_t - bp_t^2,$$

где можно резонно допустить, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Тогда метод обучения дает

$$\Delta p_{t+1} = k\frac{a(p_{t-1} + \Delta p_t) - b(p_{t-1} + \Delta p_t)^2 - ap_{t-1} + bp_{t-1}^2}{\Delta p_t}.$$

Упрощая данное выражение, получаем

$$p_{t+1} - (1 - b')p_t + b'p_{t-1} = a', \tag{1}$$

где $b' = kb$ и $a' = ka$. Легко заметить, что линейное уравнение разности второго порядка (1) сводится к равновесию $a/2b$, если и только если $0 < b' < 1$. Значит, решение сходится: а) если скорость реакции k достаточно мала или б) для данного значения k, если функция спроса и функция предельных затрат — обе относительно круто наклонены. Для некоторого значения b тогда можно создать конвергентный (в одной точке) метод обучения путем подбора $k < 1/b$, т. е. при использовании достаточно умеренной скорости реакции.

II. *Непрерывная модель.*

Модель обучения может быть переформулирована следующим образом:

$$\dot{p} = k\frac{\dot{\pi}}{\dot{p}}, \tag{2}$$

если $\dot{p} \neq 0$. В остальных случаях

$$\dot{p} = 0,$$

где точка обозначает дифференцирование по времени и k положительно. Уравнение (2) является непрерывным аналогом дискретной модели, обсуждавшейся ранее.

Теперь предположим, что функция прибыли есть вогнутая, дифференцируемая функция p, т.е.

$$\pi = f(p)$$

и

$$f''(p) < 0.$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\dot{p} = k\frac{f'(p)\dot{p}}{\dot{p}} = kf'(p). \tag{3}$$

Стабильность (3) исследуется в настоящее время с глобальной точки зрения. Система является глобально стабильной, если она приходит в состояние равновесия независимо от начальных условий. Признаком стабильности может быть то, что отклонение решения (3) от равновесного состояния уменьшается во времени монотонно [6].

Так как равновесие задается с помощью $\dot{p}_t = 0$, мы выбираем в качестве отстоящей функции Евклидову норму:

$$V(t) = \frac{1}{2}(\dot{p} - 0)^2. \tag{4}$$

$V(t) \geqq 0$ для всех t. Тогда, если мы покажем, что $\dot{V}(t) < 0$ для всех t, мы докажем глобальную стабильность.

Дифференцируя (4), мы получаем

$$\dot{V}(t) = k^2 f'(p)f''(p)\dot{p}$$

и, так как $kf'(p) = \dot{p}$, имеем $\dot{V}(t) = kf''(p)\dot{p}^2 < 0$ благодаря вогнутости функции прибыли; таким образом, данная система является глобально стабильной.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свойства моделированной функции прибыли

Нам повезло, что распределение произвольных переменных, на которых основывается наше моделирование, является достаточно простым и поддается непосредственному анализу и что на этом основании действие метода 1 могло быть предсказано. Ибо при сравнении наблюдаемых результатов с результатами, полученными при аналитических вычислениях, можно дать оценку степени надежности используемого подхода моделирования.

Пусть x_i и y_i — произвольные переменные, распределенные равномерно по целым значениям от 1 до 64. x_i — переменные, которые (вместе) составляют величину спроса, в то время как y_i прибавляется к величине затрат при любом уровне цены. Пусть t будет новой переменной, определенной как $t = 21 - p$, где p — цена. Тогда легко показать, что метод получения функций спроса и затрат дает функцию прибыли:

$$\pi_t = (21 - t)\sum_{i=1}^{t}(x_i + 2ai) - \sum_{i=0}^{t}(by_i - 8ci),$$

где значения a, b и c в шести сериях следующие:

	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4	Серия 5	Серия 6
a	0	0	0	0	0	1
b	1	4	8	1	4	1
c	0	0	0	1	1	0

Так как $E(x_i) = E(y_i) = 32.5$[18] и $\sigma^2(x_i) = \sigma^2(y_i) = 341.25$,[19] ожидаемая прибыль и расхождение могут быть выражены как

$$E(\pi_t) = (21 - t)(32.5t + at(t+1)) - b(32.5(t+1)) - 4ct(t+1)$$

и

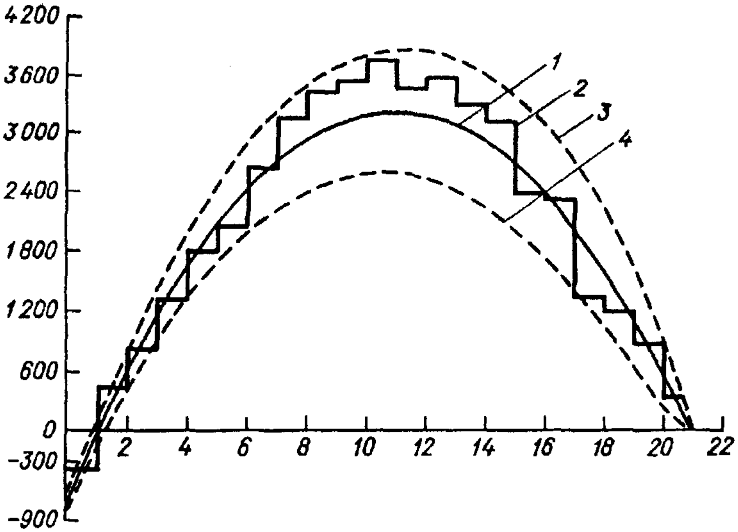
$$\sigma^2(\pi_t) = (21 - t)^2 t\sigma^2(x_i) + b^2(t+1)\sigma^2(y_i),$$

в итоге при $p = 11$ получаются следующие значения:

	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4	Серия 5	Серия 6
$E(\pi_t)$	3217.5	2145.0	715.0	2777.5	1705.0	4428.0
$\sigma(\pi_t)$	645.4	687.7	808.1	645.4	687.8	645.4
$\sigma(\bar{\pi}_t)$	132.0	140.6	165.3	132.0	140.6	132.0

[18] $E(x_i) = E(y_i) = \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} i = 32.5.$

[19] $\sigma^2(x_i) = \sigma^2(y_i) = \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64}(i - 32.5)^2 = 341.25.$



1 — ожидаемая прибыль; *2* — кривая прибыли, образованная методом случайных чисел; *3* — ожидаемая прибыль $+\sigma$; *4* — ожидаемая прибыль $-\sigma$. *По оси абсцисс* — цена; *по оси ординат* — общая прибыль.

Наблюдаемая средняя прибыль по методу 1 вполне приближается к теоретическому среднему во всех сериях, хотя все наблюдаемые средние значения больше, нежели соответствующие теоретические величины. Наблюдаемые стандартные отклонения имеют тенденцию быть ниже, чем соответствующие теоретические величины, но при использовании проверочной величины ns^2/σ^2, распределенной как χ^2, мы не можем отбросить гипотезу с уровнем значимости 0.1 о том, что наблюдаемые распределения порождены теоретическими распределениями с указанными средними значениями и стандартными отклонениями. Какое бы относительно плохое согласование ни существовало между некоторыми наблюдаемыми и теоретическими величинами, оно должно быть приписано генератору случайных чисел.

Относительно хорошее качество метода 1, особенно в сериях 1 и 6, становится понятным ввиду того, что ожидаемая функция прибыли является достаточно плоской в районе $p = 11$: например, при цене 14 дол. ожидаемая прибыль уменьшается в серии 1 с 3217.5 до 2925.0, менее чем на 10%. Ситуация может быть представлена более наглядно с помощью графика. Рисунок представляет нашу моделированную функцию прибыли. В серии 1 ожидаемая функция прибыли является параболой с максимумом при $p = 11$. Если мы обозначим прерывистыми линиями стандартные отклонения выше и ниже кривой ожидаемой прибыли, то получаем интервал между этими линиями, который довольно узок вблизи хвостов параболы, но расширяется в области максимума. Следовательно, моделированные значения прибыли почти наверняка должны возрастать вправо от начала и почти наверняка падать, когда график ожидаемой прибыли приближается к горизонтальной оси. Однако в середине стохастическая кривая может быть сравнительно плоской. Это означает, что даже когда пик кривой ожидаемой прибыли смещается вправо, как это было в сериях 2 и 3, фиксированная цена $p = 11$ может все еще давать общее значение, очень близкое к максимальному уровню прибыли. Становится также ясным, почему метод 1 не действует столь же хорошо в сериях 2 и 3: функции ожидаемой прибыли, соответствующие указанным сериям, достигают своих максимумов при все более и более высоких ценах. Фактически наблюдаемая средняя оптимальная цена была 10.25 в серии 1, 13.42 в серии 2, 14.58 в серии 3, 13.00 в серии 4, 13.83 в серии 5 и 10.88 в серии 6.

Литература

1. *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values. New York, 1951.
2. *Chernoff H.* Rational Selection of Decision Functions // Econometrica. 1954. Vol. 22. Oct.
3. *Kuhn H. W., Baumol W. J.* An Approximative Algorithm for the Fixed-Charges Transportation Problem // Naval Research Logistics Quart. 1962. Vol. 9. March.
4. *Milnor J.* Games Against Nature // Thrall R. M., Coombs C. H., Davis R. G. (Ed.). Decision Processes. New York, 1955.
5. *Simon H. A.* Theories of Decision-Making in Economics // Amer. Econ. Rev. 1959. Vol. 49. June.
6. *Struble R. A.* Nonlinear Differential Equations. New York, 1962.