Дэвид М. Крепс, Роберт Уилсон

РЕПУТАЦИЯ И НЕСОВЕРШЕННАЯ ИНФОРМАЦИЯ*

DAVID M. KREPS, ROBERT WILSON
REPUTATION AND IMPERFECT INFORMATION

В неформализованных работах по экономике (и не только по экономике) часто отмечается, что участники многоэтапных «игр» могут с самого начала стараться приобрести репутацию «жесткого» либо «доброжелательного» игрока или кого-то в этом роде. Этот феномен не стал, однако, предметом рассмотрения в формальных моделях конечных игр, подобных конечно повторяемой игре Зельтена «сеть магазинов» или конечно повторяемой «дилемме заключенных». Мы рассматриваем модель Зельтена, дополняя ее несовершенной информированностью игроков о величине выигрышей, и это дополнение оказывается достаточным для возникновения «эффекта репутации», соответствующего интуитивным представлениям.

1. Введение

Целью настоящей статьи является представление некоторых теоретико-игровых моделей, иллюстрирующих роль репутации фирмы. Литература по теории организации промышленности, посвященная несовершенной конкуренции, изобилует ссылками на эффекты репутации, но в ней не достает формальных моделей и анализа. Шерер [21], к примеру, указывает на

> «показательный эффект: резкое снижение цен на одном рынке может повлиять на поведение действительных или потенциальных соперников на других рынках. Если соперники опасаются,

* Опубликовано в Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. P. 253–279.

> что действия продавца на рынке A означают, что их появление или экспансия на рынках B и C будет встречена ценовой войной или иной хищнической реакцией, они могут воздержаться от агрессивных действий на этих рынках. Таким образом, совокупные ожидаемые выгоды от хищнического поведения на рынке A будут включать в себя и приведенную нынешнюю ценность эффектов от ограничения конкуренции на рынках B и C».

Интуитивное приятие такой логики рассуждений было, однако, оспорено «парадоксом сети магазинов» Зельтена[1] [24], демонстрирующим, что это противоречит стандартной теоретико-игровой модели. Мы изложим аргументацию Зельтена позднее, а пока отметим: загвоздка в том, что в простейших случаях нет причин, по которым поведение на одном рынке могло бы влиять на полностью рациональные стратегии на другом, в сущности независимом рынке. Очевидно, не хватает подходящего механизма, связывающего поведение на независимых (во всем остальном) рынках.

Мы показываем, что несовершенная информированность есть один из таких механизмов. Более того, воздействия неполноты информации могут быть весьма драматичны. Если соперники учитывают даже малейшие возможности того, что укоренившаяся фирма прибегнет к «хищнической реакции», тогда оптимальной стратегией для укоренившейся фирмы будет использование такого поведения при каждом (за исключением, возможно, нескольких последних) столкновении с соперниками. Для укоренившейся фирмы непосредственные издержки хищнического поведения являются в действительности небезвыгодными инвестициями в поддержание или укрепление своей репутации, предотвращающей последующие нападения противников.

Обе представляемые нами модели — варианты игры, рассмотренной Зельтеном [24]; некоторые другие вариации рассматривались ранее Крепсом и Уилсоном [8]. Первую модель можно интерпретировать в духе Шерера: монополист, контролирующий несколько рынков, сталкивается с последовательностью потенциальных новичков (хотя в нашей модели

---

[1] Зельтен рассматривал конечно повторяемую игру, описанную в разделе 2, в связи с поведением фирмы, владеющей сетью однотипных магазинов (chain-stores) в разных городах. — *Прим. ред.*

анализ не изменяется и в случае, когда повторяющиеся возможности для входа предоставляются одному-единственному сопернику). Мы трактуем это как конечно повторяемую игру с тем дополнением, что новичкам не известны точно выигрыши монополиста, и показываем, что существует единственное «осмысленное» равновесие. Вне зависимости от того, насколько малы шансы, что монополист получит выгоду от хищнического поведения, новички почти всегда избегают входа, опасаясь хищнической реакции укоренившейся фирмы. Вторая модель дополняется предположением, что в случае, когда повторяющиеся возможности для входа предоставляются одному-единственному сопернику, монополисту выигрыши новичка тоже не известны в точности. Равновесие в этой модели соответствует ценовой войне: если и входящий обладает репутацией бойца, обе фирмы могут ввязываться в войну. В классической игре «петушиный бой» эта агрессивная тактика используется обеими сторонами, старающимися заставить противника уступить, прежде чем действительно начать сражение; это выполняется, даже если с самого начала фактически очевидно, что обе стороны понесут краткосрочные потери.

После рассмотрения модели Зельтена в разделе 2 мы анализируем обе модели соответственно в разделах 3 и 4. В разделе 5 обсуждаются полученные нами результаты, а затем они соотносятся с результатами соответствующих работ в данной области. В частности, данный выпуск журнала содержит родственную статью Милгрома и Робертса [13], в которой многие из рассматриваемых нами вопросов анализируются при помощи более богатых институциональными подробностями моделей. Эта статья весьма рекомендуется нами читателю.

2. Парадокс «сеть магазинов»

Анализируемые нами модели — это вариации на тему игры «сеть магазинов», изучавшейся Зельтеном [24]. Рассмотрим поочередную игру двух участников, называемых соответственно *новичком* (потенциальным входящим) и *монополистом* (укоренившейся фирмой). Новичок делает ход первым, выбирая между *входить* и *не входить*. В ответ на вход новичка монополист делает выбор: *принять* либо *сражаться*. Если новичок не входит, от монополиста не требуется делать никакого

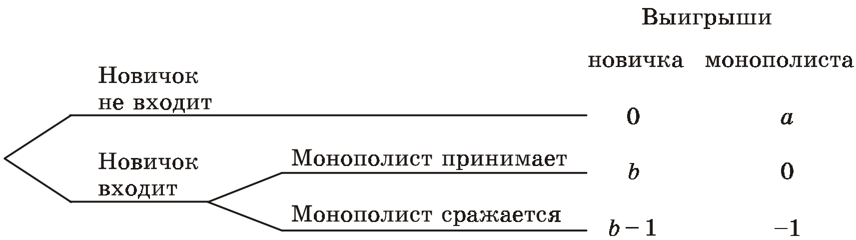

Рис. 1. Базовая игра Зельтена.

хода. Зависящие от сделанных ходов выигрыши участников приведены на рис. 1. Мы рассматриваем случай $a > 1$ и $0 < b < 1$.

Как будет протекать эта игра? Если новичок *входит*, монополист делает выбор между выигрышем 0 в случае *принять* и −1 в случае *сражаться*. Очевидно, он выберет *принять*. Ожидая такого ответа, новичок делает выбор между 0 в случае *не входить* и b в случае *входить*. Конечно, он выберет *входить*. Это одно равновесие по Нэшу, но есть и другое: если новичок должен был бы ожидать, что монополист будет сражаться, то новичок решал бы *не входить*. Заметим, что от монополиста принятие стратегии *сражаться, если входит*, не требует никаких затрат в случае, если вход не произойдет. Это второе равновесие по Нэшу. Оно не столь правдоподобно, как первое, поскольку основывается на ожиданиях новичка, что монополист, сталкивающийся с *fait accompli*[2] входа новичка, будет вести себя нерационально. Прибегая к терминологии теории игр, второе равновесие — *несовершенное*. По нашему предположению, новичок придерживается «рациональных ожиданий», что монополист выберет стратегию *принять, если входит*; таким образом, реализуется первое из равновесий.

Теперь предположим, что представленная на рис. 1 игра повторяется конечное число раз. Один и тот же монополист играет против N различных последовательно появляющихся новичков, выигрыш монополиста в этой игре есть сумма его выигрышей на каждом из N шагов. Предположим, что каждый из новичков, начиная со второго, знает все ходы, делавшиеся до его появления. Рассуждение Шерера предсказывает,

[2] Совершившимся фактом (*франц.*). — *Прим. ред.*

что в этом случае может возникнуть эффект «репутации»: монополист, вступая в сражение в каждом из прежних случаев входа, может убедить будущих противников в том, что он опять и опять будет сражаться. Так он предотвратит последующие вхождения. На самом деле и на ранних стадиях новички отказались бы от входа, чтобы не стать мальчиками для битья в целях воспитания других. Однако, как доказывал Зельтен, это рассуждение не выдерживает критики. Монополист не будет сражаться на последнем шаге, поскольку не останется новичков, перед которыми нужно проводить демонстрацию. Поэтому на последнем шаге вход непременно произойдет. Но, значит, и на предпоследнем шаге у монополиста нет основания сражаться: это приводит к текущим потерям и не оказывает никакого влияния на последнем шаге. В силу этого предпоследний новичок также выберет *входить*. Эту обратную индукцию можно продолжить: на каждом шаге игроки решат соответственно *входить* и *принять*. Выражаясь педантично, это единственное совершенное равновесие по Нэшу в данной игре [22–24]. Очевидно, эта модель не годится для подтверждения предположения Шерера о том, что эффекты репутации будут играть какую-то роль.

3. Односторонняя неопределенность

Мы утверждаем, что это несоответствие вызвано тем, что модель не отражает одной характерной особенности жизненных ситуаций. (Впервые такое замечание было сделано Розенталем [17], чью работу мы будем обсуждать в разделе 5.) В действительности новички не в состоянии *точно знать* выигрышей монополиста. Они могут не иметь представления о затратах монополиста или о получаемых им нематериальных выгодах; быть может, монополисту нравится быть «жестким». Более красочно последнее выражается фразой: монополист играет жестко «иррационально». Это соответствует словам Шерера [21, с. 247]: «...следовательно, скорее боязнь нерационального или откровенно враждебного противодействия, чем ожидание рациональной ценовой реакции, может удерживать потенциального новичка от полномасштабного входа». Как бы то ни было, в простейшей ситуации новички могут изначально считать, что с положительной вероятностью p выигрыши монополиста соот-

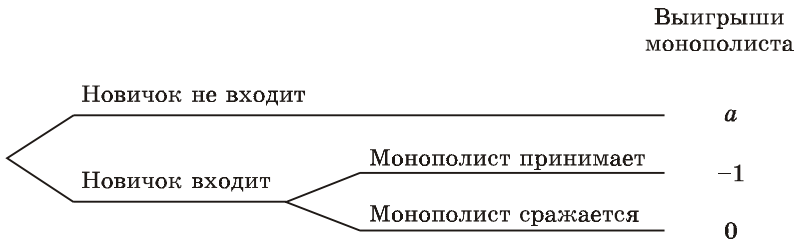

Рис. 2. Выигрыши жесткого монополиста.

ветствуют не рис. 1, а рис. 2, отражающему текущие выгоды от воинственной реакции. В данном случае последующие новички, отслеживая прошлые ходы, будут на этом основании пересматривать свою оценку p. Возможно, такая ситуация и породит эффект репутации.

Формально мы моделируем это следующим образом. Всего есть $N+1$ игрок (N — натуральное число). Один из игроков — *монополист*, другие — *новичок* N, *новичок* $N-1$, ..., *новичок* 1. Монополист последовательно играет против новичков в следующем порядке: сначала с новичком N, затем с новичком $N-1$ и т. д. (Здесь и далее мы индексируем моменты времени в обратном порядке и называем n-м шагом тот розыгрыш, в котором участвует n-й новичок.) Выигрыши каждого новичка соответствуют рис. 1.

Выигрыш монополиста составной: он равен (пока не дисконтированной) сумме его выигрышей на каждом из шагов; при этом структура его выигрышей на каждом из шагов *одна и та же* и соответствует либо рис. 1, либо рис. 2. Монополист знает, какая именно из двух структур его выигрышей реализована в действительности. Новички же изначально считают, что, с вероятностью d, структура выигрышей монополиста соответствует рис. 2. На всем протяжении игры любой очередной новичок (и монополист также) знает все прошлые ходы. Следовательно, история игры до шага n может позволить n-му новичку пересмотреть оценку d, если течение игры предоставляет информацию о том, какая из структур выигрышей монополиста относительно правдоподобнее.

Эта модель соответствует данной Харшаньи [7] трактовке игры с неполной информацией. С другой стороны, это игра с несовершенной (для новичков) информацией и полной памятью, где сначала «природа» определяет структуру выигрышей монополиста, и сделанный «природой» ход известен монополисту, но не новичкам. Следуя первой интерпретации, мы говорим о *слабом монополисте* или о *сильном монополисте*, подразумевая, что выигрыши монополиста соответствуют либо рис. 1, либо рис. 2.

Поскольку игроки обладают полным знанием прошлого, без потери общности можно ограничиться рассмотрением стратегий поведения [10]. Мы намереваемся определить равновесие по Нэшу для данной игры так, чтобы оно было *совершенным*. Это означает, что мы желаем исключить равновесия, основанные на ожидании игроками такого поведения противника, которое могло бы оказаться нерациональным для последнего в какой-либо возможной игровой ситуации, требующей от него хода.

Поскольку рассматриваемые нами игры — это игры с неполной информацией, введенная Зельтеном [22] концепция совершенного субигрового равновесия неприменима. С другой стороны, затруднительно применение его же концепции совершенного равновесия «с неуверенными игроками» [23] к играм со сложными пространствами стратегий, подобным данной. Поэтому мы используем сходную концепцию последовательного равновесия. Это распространение понятия равновесия по Нэшу на позиционные игры. Оно соответствует духу зельтеновского критерия совершенности, но его применение значительно легче. Общие определения и свойства последовательного равновесия приводятся в нашей прежней работе [9], содержание которой мы резюмируем здесь.

Определение последовательного равновесия включает следующие три основных положения.

(а) В каждом информационном множестве ходящий игрок должен иметь представление о том, какая вершина информационного множества им достигнута, что выражено вероятностным распределением на множестве вершин данного информационного множества.

(б) Для каждого информационного множества эти распределения согласованы с предполагаемой равновесной стратегией. К примеру, они должны соответствовать правилу Байеса везде, где оно применимо.

(в) Для *каждого* информационного множества последующая стратегия ходящего игрока должна быть оптимальной с точки зрения предполагаемых последующих ходов противника (заданных стратегиями), а также согласованной с представлениями ходящего о прошлых ходах игроков и «природы». Разница между данной и стандартной концепциями равновесия по Нэшу состоит в том, что выполнение пункта (в) требуется для *каждого* информационного множества, включая те, что не будут достигнуты при следовании равновесным стратегиям. Таким образом, каждый игрок будет готов следовать избранной им стратегии в любой требующей от него хода ситуации, к которой могло бы привести развитие игры.

Теперь о свойствах. Последовательные равновесия существуют для всех конечных позиционных игр. Они являются совершенными субигровыми равновесиями по Нэшу. При заданных позиционной форме и вероятностях ходов природы путем изменения выигрышей можно добиться того, что все строго последовательные равновесия будут одновременно и совершенными равновесиями «с неуверенными игроками»; тогда траектория каждого последовательного равновесия будет траекторией какого-либо совершенного равновесия «с неуверенными игроками». Любое совершенное равновесие «с неуверенными игроками» есть последовательное равновесие.

В случае анализируемой здесь игры последовательное равновесие описывается следующим образом. Равновесие есть набор, состоящий из стратегий всех игроков, *а также* из соответствующих каждому шагу $n = N, \ldots, 1$ функций p_n, отображающих серии ходов, сделанных до n-го шага в отрезок [0, 1]. Таким образом:

(а) начиная с каждой вершины, соответствующей ходу монополиста, его последующая стратегия есть наилучший ответ на стратегии новичков;

(б) для любого n зависящая от игровой истории h_n стратегия n-го новичка есть наилучший ответ на стратегию монополиста при условии, что с вероятностью $p_n(h_n)$ монополист — сильный;

(в) в начале игры $p_N = \delta$;

(г) всегда, когда это возможно, вероятности p_n рассчитываются по правилу Байеса через p_{n+1} и стратегию монополиста. (Мы не будем явно выписывать пункт (г), так как все станет прозрачным, когда мы примемся выводить равновесие. Может представляться не вполне очевидным, что из (г) следует «согласованность представлений» в духе нашей прежней работы [9], но это вытекает из простоты структуры рассматриваемой здесь игры.) Функция p_n интерпретируется как оценка n-м новичком вероятности того, что монополист сильный, являющаяся функцией траектории игры до шага n. Заметим, что в (а) опущены распределения оценок на вершинах информационных множеств монополиста, поскольку все его информационные множества — одноточечные.

Теперь укажем последовательное равновесие для этой игры. Это своеобразное последовательное равновесие обладает тем нежданным свойством, что для продолжения игры с n-го шага p_n есть достаточная статистика истории игры вплоть до шага n. Это означает, что выбор игроков на шаге n зависит только от p_n и (для монополиста) от хода новичка n; p_n — функция p_{n+1} и ходов на шаге $n + 1$. Нам удается найти последовательное равновесие, имеющее по счастливой случайности очень простую структуру; вообще говоря, неверно, что для любой игры можно найти последовательное равновесие, для которого распределения оценок игроков есть достаточная статистика прошлого игры. (См. замечание (А) ниже.)

Начнем с описания функций p_n. Определим $p_N = \delta$. Для $n < N$ определим $p_n = 0$, если в истории игры до шага n был *хоть один* случай, что вхождение было встречено принятием. Если вплоть до шага n любое вхождение встречалось сражением, то $p_n = \mu\,\alpha\xi(b^{k-1}, \delta)$, где $k(> n)$ есть наименьший индекс, для которого производился вход на шаге k. Если вхождений не было, $p_n = \delta$.

Это соответствует следующему рекурсивному определению:

(а) если на шаге $n + 1$ не было вхождения, то $p_n = p_{n+1}$;

(б) если на шаге $n + 1$ было вхождение и оно было встречено сражением и если $p_{n+1} > 0$, то $p_n = \mu\,\alpha\xi(b^n, p_{n+1})$;

(в) $p_{n+1} = 0$, если на шаге $n + 1$ было вхождение и оно было встречено принятием либо если $p_{n+1} = 0$.

Теперь, описав, как рассчитываются p_n для любой из вершин дерева игры, мы можем описать стратегии игроков на языке оценок p_n.

Стратегия монополиста

(а) Если монополист сильный, то он всегда сражается с входящим.

(б) Если монополист слабый, то при входе новичка на шаге n ответ монополиста зависит от n и p_n. При $n = 1$ монополист выбирает *принять*. При $n > 1$ и $p_n \geq b^{n-1}$ монополист выбирает *сражаться*. Если $n > 1$ и $p_n < b^{n-1}$, то монополист с вероятностью $\left((1 - b^{n-1}) \cdot p_n\right)/\left((1 - p_n) \cdot b^{n-1}\right)$ выбирает *сражаться* и с дополнительной вероятностью выбирает *принять*. (Заметим, что, когда $p_n = 0$, вероятность выбора *сражаться* равна нулю; когда $p_n = b^{n-1}$, вероятность выбора *сражаться* равна единице.)

Стратегии новичков

Если $p_n > b^n$, то новичок n выбирает *не входить*. Если $p_n < b^n$, то новичок n выбирает *входить*. Если $p_n = b^n$, то новичок n осуществляет случайный выбор, играя *не входить* с вероятностью $1/a$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Приведенные выше стратегии и представления образуют последовательное равновесие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы даем лишь набросок доказательства, предоставляя проработку деталей читателю. В случае данной игры следует проверить два пункта. Во-первых, представления новичков должны быть согласованы со стратегией монополиста в смысле правила Байеса (повсюду, где оно применимо). Во-вторых, для каждого информационного множества входящий игрок не должен иметь стимула (в смысле выигрыша в оставшейся части игры) менять выбор своего хода в этом информационном множестве. Для новичков эта проверка производится при помощи описанных выше представлений. (После проверки этого байесовская согласованность представлений и «принцип оптимальности» Беллмана гарантируют, что начиная из любой вершины дерева игры ни один из игроков не может с выгодой для себя изменить свою стратегию.)

Проверить байесовскую согласованность легко. Если на шаге n вход не производится, о монополисте ничего неизвестно, а $p_{n-1} = p_n$. Если $p_n \geq b^{n-1}$, то предполагается, что монополист будет сражаться с входящим. Если $p_n = 0$, монополист примет входящего. Во всех случаях из правила Байеса вытекает, что $p_{n-1} = p_n$, пока монополист следует своей стратегии, что мы и имеем. Наконец, для $p_n \in \left(0, b^{n-1}\right)$ положительна как вероятность того, что монополист будет сражаться, так и вероятность того, что он примет входящего. Он примет входящего только в случае своей слабости, и тогда мы реально имеем $p_{n-1} = 0$. Если монополист сражается, правило Байеса требует, чтобы

$$p_{n-1} = p\,(\text{монополист сильный} \mid \text{монополист сражается}) =$$

$$= \frac{p(\text{монополист сильный и сражается})}{p(\text{монополист сражается})} =$$

$$= \frac{p(\text{сражается} \mid \text{сильный}) \cdot p(\text{сильный})}{p(\text{сраж-ся} \mid \text{сильный}) \cdot p(\text{сильный}) + p(\text{сраж-ся} \mid \text{слабый}) \cdot p(\text{слабый})} =$$

$$= \frac{1 \cdot p_n}{1 \cdot p_n + [((1 - b^{n-1}) \cdot p_n)/((1 - p_n) \cdot b^{n-1})][1 - p_n]} = b^{n-1},$$

что мы и постулировали. Таким образом, представления и стратегии согласованы по Байесу.

Отметим, что есть два примера, когда правило Байеса неприменимо: если $p_n \geq b^{n-1}$ и монополист принимает входящего, а также если $p_n = 0$ и монополист сражается. В обоих случаях мы назначаем $p_{n-1} = 0$. Словом, мы полагаем, что любое принятие рассматривается новичками как доказательство слабости монополиста и что, раз возникнув, это убеждение новичков остается непоколебимым. Это задание представлений вне равновесной траектории отчасти произвольно, есть и другие работоспособные распределения. Однако такое задание — не чистая прихоть, есть и распределения, которые не дают равновесия. (Ниже мы обсудим это подробнее.)

(Повторим сделанное выше замечание: этот набор вероятностей согласован в духе нашей статьи [9]. Прямое доказательство нетрудно.)

То, что новички играют оптимально, проверяется непосредственно. Если $p_n \geq b^{n-1}$, новичок n ожидает сражения в случае входа и потому решает не входить. Если $p_n \in (b^n, b^{n-1})$, с положительной вероятностью случится принятие, но величина этой вероятности меньше $1 - b$. Опять-таки лучше не входить. Если $p_n = b^{n-1}$, с вероятностью $1 - b$ за вхождением последует принятие, так что новичок безразличен в выборе.

Если $p_n < b^{n-1}$, вероятность принятия больше $1 - b$ и новичок входит.

Дабы убедиться, что сильный монополист играет оптимально, отметим: если новички следуют указанной выше стратегии, то в любой из моментов времени принятие приведет к большему числу последующих случаев входа, чем сражение. Для сильного монополиста в коротком периоде сражение предпочтительнее принятия, но и в длительном периоде меньшее число входов лучше, поэтому сильный монополист будет сражаться всегда.

Наконец, для слабого монополиста, можно проверить индукцией, что при условии следования указанным стратегиям ожидаемый выигрыш от шага n до шага 1 включительно задается следующей функцией от p_n:

$$
\begin{aligned}
v_n(p_n) &= a(t - k(p_n) + 1) + 1, && \text{если } b^n < p_n = b^{k(p_n)} - 1\,,\\
&= a(t - k(p_n) + 1), && \text{если } b^n < p_n < b^{k(p_n)} - 1\,,\\
&= 1\,, && \text{если } p_n < b^n\,, \text{ и}\\
&= 0\,, && \text{если } p_n = b^n\,,
\end{aligned}
$$

где $k(p) = \inf\{n\colon\ b^n < p\}$ при $p > 0$; $k(0) = \infty$. Теперь предположим, что на шаге n имеет место вхождение. Принимая новичка, монополист получает 0 как на этом, так и на всех последующих шагах игры (поскольку p_{n-1} будет приравниваться к нулю). Сражаясь, монополист получает на этом шаге −1. При этом ожидаемый будущий выигрыш равен нулю при $p_n = 0$, равен единице при $0 < p_n < b^{n-1}$ и больше единицы при $p_n > b^{n-1}$. Таким образом, слабый монополист будет рад следовать стратегии, описанной выше.

Легче всего понять природу этого равновесия, прослеживая игру с «типичными» значениями d и b, например $\delta = 1/10$ и $b = 1/2$. Отметим, что тогда $k(\delta) = 4$. Обратимся к рис. 3. На шаге N (полагая $N > 4$) игра начинается при $p_N = \delta$. На этом шаге любой монополист будет сражаться независимо от выигрыша, поэтому вход «закрыт». Игра развивается в направлении стрелки (а) (см. рис. 3) к точке $p_{N-1} = p_N = \delta$. Отметим,

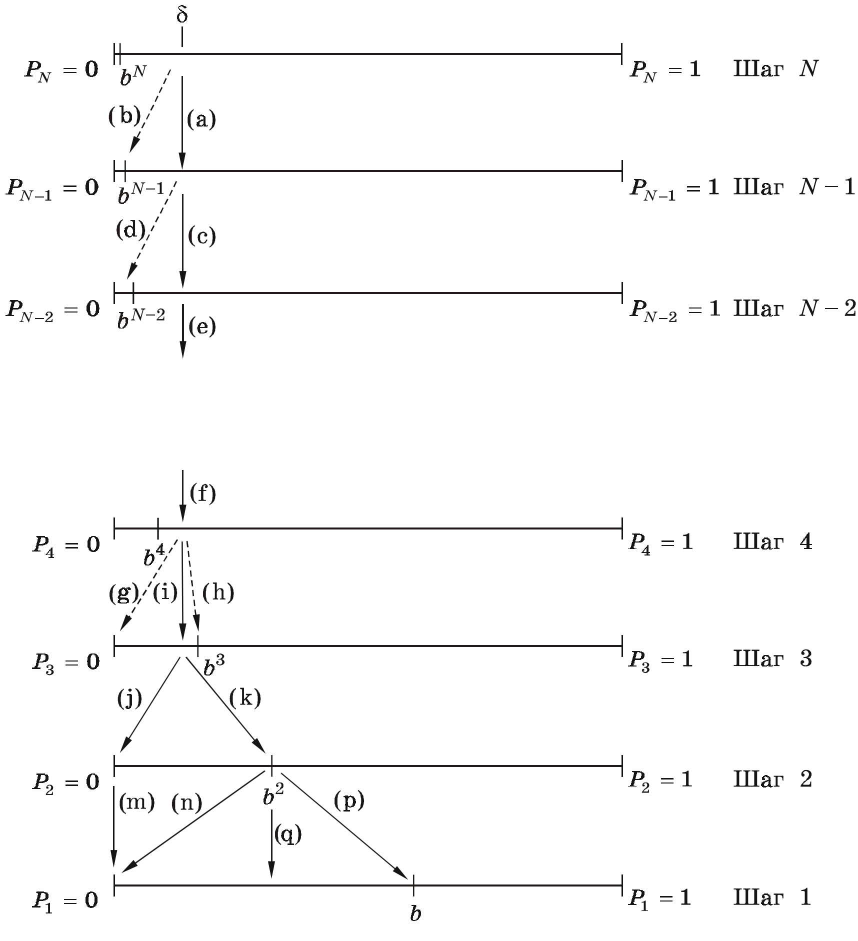

Рис. 3. Развитие игры во времени.

что, если вход *осуществлен*, монополист *ex post*[3] готов сражаться, поскольку принятие новичка приводит по стрелке (b) к $p_{N-1} = 0$ и начиная с этого момента чистый доход монополиста равен нулю. Издержки сражения сразу становятся равны 1, но будущие издержки принятия куда больше. (На самом деле не-

[3] С точки зрения совершившегося в действительности (*лат.*). — *Прим. ред.*

обходимо, чтобы издержки принятия были не меньше 1; до тех пор пока принятие ведет к $p_{N-1} \leq 1/16$, так и будет. Вот один из случаев, когда для получения равновесия небайесовские переоценки необязательно должны быть *в точности* такими, как предписывалось выше. Отметим, что условие $p_{N-1} \leq 1/16$ необходимо, иначе слабый монополист предпочел бы на шаге N не сражаться, а принять новичка.) Игра продолжается таким же образом (стрелки (c), (e), (f)) до момента $4(= k(\delta))$. В этот момент слабый монополист уже может принять новичка, если тот бросает ему вызов; стратегия слабого монополиста такова, что после вхождения новичка игра приводит либо к $p_3 = 0$ (стрелка (g), принятие), либо к $p_3 = b^3$ (стрелка (h), сражение). Но это *не* дает новичку достаточных стимулов для входа — в действительности игра идет по стрелке (i) к $p_3 = \delta$. На шаге 3 слабый монополист снова делает случайный выбор в случае угрозы входа (последствия указаны стрелками (j) и (k)), и теперь оценка новичком вероятности принятия достаточно велика, чтобы он входил. Если монополист принимает новичка, игра идет по стрелке (j) к $p_2 = 0$. С этого момента уже известно, что монополист — слабый, и новички 2 и 1 входят, рассчитывая, что монополист примет их. Именно поэтому монополисту *следует* принять новичков; если бы он, например, стал сражаться на шаге 2, новичок 1 проигнорировал бы этот факт, продолжая считать, что монополист — слабый. Таким образом, $p_1 = 0$ независимо от того, принимает новичка 2 монополист или сражается с ним. (Отметим, что если бы монополист все время сражался и получалось бы $p_1 \leq 1/2$, мы все равно имели бы равновесие. Однако в случае $p_1 > 1/2$ слабый монополист мог бы предпочесть сражаться, нарушая равновесие. Здесь опять есть некоторая (но не полная!) свобода в определении представлений вне равновесной траектории.) Возвращаясь к шагу 3: если монополист сражается с входящим, игра идет по стрелке (k) к $p_2 = 1/4$. В этом случае новичку 2 безразлично: входить или не входить, и он делает выбор случайным образом. Если новичок 2 входит, слабый монополист случайным образом выбирает между принятием (стрелка (n)) и сражением (стрелка (p)). Если новичок 2 не входит, то игра идет по стрелке (q) к $p_1 = 1/4$ (и новичок 1, конечно же, входит).

Замечательно в этом равновесии то, насколько сильно начинает довлеть эффект репутации даже при очень малых d.

Даже если новички изначально оценивают вероятность d того, что монополист предпочитает сражаться, как одну тысячную, но число шагов игры более десяти, то новички воздерживаются от входа, поскольку монополист *непременно* будет сражаться дабы сохранить свою репутацию. Отметим «разрывность», определяющую это: при $N \to \infty$

$$\lambda\mu\ v_N(\delta)/N = a, \text{ если } \delta > 0\,,$$

$$v_N(\delta)/N = 0\,, \text{ если } \delta = 0\,.$$

Теперь возникает очевидный вопрос: в каких рамках это равновесие единственное? По следующим четырем причинам это не единственное равновесие по Нэшу для данной игры.

(а) Существуют другие равновесия по Нэшу, не являющиеся последовательными. (Они, грубо говоря, несовершенны.) Например, одинаковые стратегии всех новичков «не входить» и стратегия монополиста «сражаться при каждом входе» (вне зависимости от выигрышей) дают равновесие по Нэшу. Но такое поведение «нерационально *ex post*» на шаге 1 для слабого монополиста. Вообще-то, нам хочется иметь единственное *последовательное* равновесие, и мы ограничим свое внимание (до конца настоящего обсуждения) именно такими случаями.

(б) Существуют последовательные равновесия, где сильный монополист принимает входящего. Например, для $N = 2$, $b = 1/2$ и $\delta = 2/3$ (очень большая вероятность, что монополист — сильный) есть последовательное равновесие: для новичка 2 *входить*, а для монополиста *принять его* (вне зависимости от своих выигрышей); новичок 1 выбирает стратегию: *не входить, если монополист принял новичка на шаге 2*; *входить, если монополист сражался на шаге 2*. (На шаге 1 монополист отвечает так, как выгоднее ему *ex post*.) Это последовательное равновесие, поскольку оно соответствует следующим представлениям новичка 1:

$$p\,(\text{монополист сильный} \mid \text{монополист принял новичка 2}) = p_2 = 2/3\,,$$

$$p\,(\text{монополист сильный} \mid \text{монополист сражался с новичком 2}) = 1/4\,.$$

Для данных стратегий первая из этих переоценок следует из правила Байеса, а вторая «легитимна», поскольку правило Байеса неприложимо: априорная вероятность того, что монополист станет сражаться на шаге 2, равна нулю.

Хотя это и последовательное равновесие, мы утверждаем, что оно не слишком осмысленно. Изъян — в представлениях новичка 1: если на шаге 2 было сражение, новичок 1 *уменьшает* вероятность того, что монополист сильный. Должно представляться правдоподобным, что сильный монополист склонен сражаться никак не менее упорно, чем слабый монополист. Таким образом, интуиция подсказывает, что новичок 1 будет оценивать ситуацию так:

$$p\,(\text{сильный} \mid \text{сражался}) \;\;{}^{3}\;\; p\,(\text{сильный} \mid \text{принял}).$$

Но если мы настаиваем на выполнении этого условия, только что описанное равновесие исключается.

Выражая это формально, мы будем называть представления $\{p_n\}$ новичков *убедительными*, если: для любых двух данных игровых историй (до шага n) h_n и h'_n исходя из того, что всякое «принятие» в h_n есть «принятие» в h'_n, следует $p_n(h_n) \geq p_n(h'_n)$. Мы собираемся ограничиться только последовательными равновесиями, соответствующими убедительным представлениям. Заметьте, что это не выполняется для только что рассмотренного равновесия, но верно для равновесия из ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.

(в) Для последовательного равновесия, введенного в данном разделе, есть некоторая свобода в описании того, что происходит вне равновесной траектории. Например, мы настаивали, что если $p_n = 0$ и монополист сражается при входе на шаге n, то новички полагают $p_{n-1} = 0$. Таким образом, как только в нашем равновесии $p_n = 0$, все последующие новички входят. Но мы могли бы также получить равновесие, положив $p_{n-1} = b^{n-1}$, и новичок $n-1$ делал бы случайный выбор между *входить* и *не входить*. Подчеркнем, что это касается поведения новичка только вне равновесной траектории, но с точки зрения стратегий это другое равновесие. Мы не можем рассчитывать на единственность вне равновесной траектории.

(г) Наконец, есть небольшая свобода в определении равновесия вдоль равновесной траектории, когда $\delta = b^n$ для какого-либо значения $n \leq N$. В этом случае поведение новичка n не обязательно должно соответствовать вышеописанной стратегии — годится любой случайный выбор.

Исключая эти четыре случая, мы имеем единственность, рассмотренную ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если ни для какого $n \le N$ значение* d *не равно b^n, то любое последовательное равновесие с правдоподобными представлениями имеет стратегии, соответствующие на равновесной траектории описанным выше. Таким образом, каждое последовательное равновесие с правдоподобными представлениями имеет приведенные выше оценочные функции.*

Доказательство проводится методом индукции, и читателю предоставляется это сделать самому. Мы отметим лишь, что при использовании метода индукции устанавливается следующее:

(а) Оценочная функция сильного монополиста (в равновесии) будет неубывающей функцией p_n, и, следовательно, сильный монополист будет сражаться при каждом входе.

(б) Оценочная функция слабого монополиста будет неубывающей функцией p_n, задаваемой для $\delta \ne b^m$ $(m \le n)$ формулой из доказательства ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.

(в) Если на шаге n был вход и монополист сражался, то новичок $n - 1$ должен не входить с вероятностью $1/a$.

Проводя доказательство, читатель прочувствует интуицию, обосновывающую это равновесие, а мы попробуем здесь подытожить. Согласно правдоподобным представлениям, сильный монополист всегда будет сражаться с входящим. Таким образом, любое принятие есть решающее доказательство слабости монополиста. Более того, однократная выдача такого подтверждения должна приводить к нулевому выигрышу монополиста, — здесь реализуется (с некоторыми модификациями) аргументация Зельтена, изложенная нами в разделе 1. Для вхождения новичка n необходимо, чтобы вероятность принятия его монополистом была не меньше $1 - b$, а это требует случайного выбора хода слабым монополистом либо просто согласия принять новичка. Кроме того, требуется, чтобы $p_n \le b$, и, согласно правилу Байеса, если этот вход *был* встречен сражением, то $p_{n-1} \ge p_n/b$. Так, если мы начинаем при $\delta > b^m$, то может быть никак *не более m* новичков, для которых вероятность входа положительна. При росте N выигрыш любого монополиста асимптотически приближается к aN, а при $N > 2m$ слабый монополист всегда будет готов сражаться. (На поверку, в равновесии оказывается, что это истинно для $N \geq m$.)

Мы завершаем это раздел указанием некоторых расширений и улучшений базовой модели.

(А) Выше мы рассматривали случай $a > 1$. Если $0 < a \leq 1$, получается по сути та же структура равновесия, в которой для достаточно больших n новички не входят, поскольку монополист будет сражаться с вероятностью единица. Тем не менее к концу течение игры усложняется. В частности, нельзя получить равновесие, в котором стратегия новичка n зависит только от p_n, — она зависит от p_n и игровой истории последних j раундов, где j есть наименьшее из натуральных чисел, для которых $ja > 1$.

(Б) Если монополист дисконтирует свои пошаговые выигрыши с множителем r, получается следующее. При $\rho > 1/a$ равновесие *в точности* такое же, как и выше, за исключением того, что должны измениться вероятности случайного выбора для новичков. При $\rho \leq 1/(a+1)$ равновесие совсем другое: слабый монополист принимает первого же входящего новичка, таким образом, новички входят при $p_n < b$ и воздерживаются от входа при $p_n > b$. В случае $1/(a+1) < \rho \leq 1/a$ характер равновесия таков же, как и при $\rho > 1/a$: при достаточно больших n новички не входят, поскольку монополист будет сражаться при каждом входе. Для малых n равновесие усложняется подобно случаю без дисконтирования, где $a < 1$.

(В) Предположим, что вместо поочередной игры, отраженной на рис. 1, на каждом из шагов проводится игра два-на-два с одновременными ходами, соответствующая табл. 1, причем выигрыши соответствуют либо (а) (с вероятностью $1 - \delta$), либо (б) (с вероятностью d). (Предполагается $0 < b < 1$ и $a > 1$.) Иначе говоря, структура игры такова: вначале в соответствии с данными вероятностями выбирается одна из этих биматриц; затем монополист играет против N последовательно появляющихся новичков. Монополист знает, которая из биматриц выбрана, а новички — нет.

В случае $\delta = 0$ с помощью идеи Зельтена легко показать, что есть *единственное* (совершенное или несовершенное) рав-

Таблица 1

		новичок	
		столбец 1	столбец 2
монополист	строка 1	$-1, b-1$	$a-1, 0$
	строка 2	$0, b$	$a, 0$

а)

		новичок	
		столбец 1	столбец 2
монополист	строка 1	$0, b-1$	$a, 0$
	строка 2	$-1, b$	$a-1, 0$

б)

новесие, состоящее в реализации на каждом шаге ситуации, соответствующей строке 2 и столбцу 1. Это определяется тем, что строка 2 строго доминирует в одношаговой игре. Однако для $\delta > 0$ мы получаем равновесие, почти идентичное тому, что обсуждалось выше: на всех шагах n, для которых $b^n < \delta$, монополист играет согласно строке 1 вне зависимости от того, какая биматрица выбрана, а новичок отвечает согласно столбцу 2. (Течение игры чуть-чуть меняется в конце.) Итак, мы видим, что небольшая неполнота информации может не только сделать несовершенное равновесие совершенным (точнее, последовательным), но и обеспечить реализацию действий, составляющих последовательное равновесие, которые с очень большой вероятностью *строго доминируются* в одношаговой игре.

(Г) Пол Милгром указал нам на то, что похожее равновесие получается даже в случае, если каждый участник игры знает выигрыши монополиста при условии, что это знание *не всеобщее*. Последнее подразумевает, что каждый новичок знает выигрыши монополиста, но не уверен, обладают ли этой информацией его собратья. Тогда (при соответствующем точном описании ситуации) новичок опасается, что слабый монополист будет сражаться (при больших n) с целью поддержать свою репутацию среди прочих новичков. Если так, новичок не будет входить. Также и монополист, даже если он знает, что все новички осведомлены о его слабости, может быть готов сражаться с первыми новичками, чтобы «убедить» последующих новичков в том, что он не догадывается об их осведомленности. (Четкое доказательство этого проводится в работе Милгрома и Робертса [13].) Доказательство Зельтена требует всеобщего знания того, что монополист — слабый. В плане реальных ситуаций — это очень сильное допущение, и даже такое небольшое его ослабление (куда меньшее, чем мы делали ранее) порождает эффект репутации.

(Д) Мы рассматривали исключительно случай игры одинокого монополиста против N различных новичков. Любопытен другой случай, когда монополист играет N раз против единственного новичка. Оказывается, что для анализировавшейся в данном разделе игры такое изменение не оказывает влияния на равновесие. (Предоставляем проверить это читателю.) Как мы увидим в следующем разделе, это (отчасти) вызвано отсутствием неопределенности по поводу выигрышей новичков.

4. Двусторонняя неопределенность

В настоящем разделе мы рассматриваем, что происходит в случае, когда монополист не знает в точности выигрышей новичков. Наиболее интересна редакция этой проблемы, когда монополист N раз повторяет базовую игру, соответствующую рис. 1, с единственным противником. Выигрыш каждого из игроков есть сумма его выигрышей по всем шагам игры. Выигрыши монополиста таковы, как на рис. 1 и 2, с вероятностями $1 - \delta$ и d соответственно. Для некоторого b выигрыши новичка таковы, как на рис. 1, причем $0 < b < 1$ с вероятностью $1 - \gamma$ и $b > 1$ с вероятностью g. Каждый игрок с самого начала игры знает, какая из двух структур выигрышей реализовалась для него, но не знает о выигрышах противника. Структуры выигрышей статистически независимы.

Следуя терминологии раздела 3, мы говорим о слабом новичке ($0 < b < 1$) и о сильном новичке (если $b > 1$).

Отметим, что для сильного новичка на любом шаге лучше входить, чем не входить, даже если несомненно, что монополист будет сражаться. Поскольку кажется правдоподобным, что вхождение не уменьшит вероятность того, что монополист далее будет принимать новичка, мы ищем равновесие, в котором сильный новичок входит всегда. Тем самым любой отказ от вхождения клеймит новичка как слабого, и мы возвращаемся к случаю из раздела 3. (Напомним, что там не имело значения, был новичок одним-единственным или было N новичков.) Подобным образом мы ищем равновесие, в котором сильный монополист всегда сражается. Любой отказ от сражения клеймит монополиста как слабого, и, следуя этому, новичок всегда входит, а монополист всегда принимает его. Итак, мы ищем равновесие следующего толка:

— сильный новичок всегда входит;

— сильный монополист всегда сражается;

— слабый новичок выбирает стратегию смешивания «правил остановки»; правило остановки определяет момент, в который новичок «уступает» и перестает входить, если до сих пор монополист ни разу не принимал его (вообще-то, новичок может входить позднее, если следовать равновесию из раздела 3);

— слабый монополист также перемешивает «правила остановки»; правило остановки определяет момент, когда монополист впервые принимает новичка, если тот не ретировался первым;

— если та или иная сторона уступает, мы оказываемся либо в ситуации из раздела 3, либо в ситуации, когда до конца игры осуществляются на каждом шаге соответственно вхождение и принятие.

Полное описание получаемого равновесия чрезвычайно утомительно, поскольку оно основывается на множестве сложных рекуррентных соотношений. Мы все же можем дать приблизительное описание происходящего. На любом шаге n прошлое течение игры подытоживается двумя статистиками: p_n (оценкой новичком вероятности того, что монополист сильный) и q_n (оценкой монополистом вероятности того, что новичок сильный). (В начале игры $p_N = \delta$ и $q_N = \gamma$.) Таким образом, «пространство состояний на шаге n» игры есть единичный квадрат, что отражено на рис. 4.

Сторона (граница) $q_n = 0$ есть предмет рассмотрения в разделе 3. Граница $p_n = 0$ может исследоваться с использованием рассуждения Зельтена, приводящего к следующему выводу: новичок всегда входит, а слабый монополист всегда принимает его.

Как показано, кривая делит квадрат на две части. Если точка $x = (p_n, q_n)$ лежит в области I, то вне зависимости от выигрышей новичок входит, а слабый монополист делает случайный выбор. Если слабый монополист принимает новичка, игра

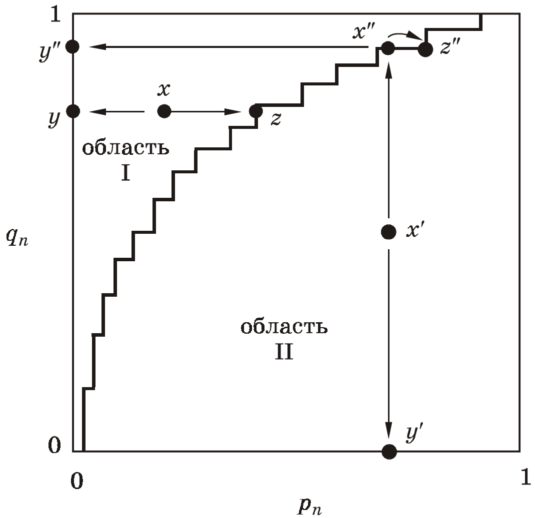

Рис. 4. Пространство состояний на шаге *n*.

переходит в точку y (в действительности в точку y следующего квадрата, соответствующего шагу $n-1$). Если слабый монополист сражается или если монополист — сильный (и, значит, сражается), новичок пользуется правилом Байеса для подсчета p_n и оказывается в точке z, лежащей на данной кривой, но находящейся *по ту сторону* кривой следующего квадрата, т. е. в его области II.

Если точка $x' = (p_n, q_n)$ лежит в области II, то слабый новичок делает случайный выбор. Если новичок не входит, реализуется равновесие из раздела 3 и следующий шаг начинается с точки y'. Если слабый новичок входит или если новичок — сильный (и, следовательно, входит), монополист пересчитывает вероятность того, что новичок сильный, оказываясь в точке кривой x''. Затем слабый монополист делает выбор случайным образом и игра переходит либо в точку y'', либо в точку z''. Обе эти точки находятся в области II следующего квадрата, поэтому следующий раунд начинается со случайного выбора для слабого новичка и т. д.

За исключением старта игры, когда $p_n = \delta$ и $q_n = \gamma$, большая часть игры идет по кривой. (В действительности кривая несколько поворачивается при изменении n.) Итак, мы видим, что за начальным скачком на кривую (или на одну из двух границ) следует медленное восхождение по кривой с постоянной возможностью перескочить на одну из границ. С единичной вероятностью слабый игрок рано или поздно уступит, поэтому мы либо когда-нибудь перескочим на одну из границ, либо, если оба игрока — сильные, достигнем в конце концов точки $p_0 = q_0 = 0$. Это игра «петушиный бой», в которой, раз начав, каждая (слабая) сторона случайным образом выбирает: или с малой вероятностью *уступать*, или с большой вероятностью *бросать* сопернику *вызов* на еще один раунд. Такое отношение этих вероятностей требуется условиями равновесия: в текущем раунде бросать вызов затратнее, но уступать — дороже с точки зрения последующей игры. Поэтому однократное бросание вызова не должно давать ни одному игроку существенных шансов *немедленной* наживы; с большой вероятностью противник должен быть «вызван» еще и еще.

Для дискретного времени аккуратный вывод равновесия трудоемок, тогда как для варианта игры в непрерывном времени — это относительно просто. Посему мы изложим сейчас версию для непрерывного времени. (Следует предупредить читателя: мы будем в дальнейшем несколько небрежны, но все, о чем мы говорим, может быть сделано точно.)

Для начала рассмотрим игру из раздела 3, проводимую против единственного новичка в период времени с момента N по момент 0. Вместо розыгрышей в моменты N, $N-1$, ..., 1 с пошаговыми ставками из раздела 3 представим себе, что задано натуральное K и что розыгрыши проводятся «чаще, но с меньшими ставками», т. е. игра проводится в моменты N, $(N \cdot K-1)/K$, $(N \cdot K-2)/K$, ..., $1/K$ со ставками, в K раз меньшими заданных ранее. В разделе 3 решающим было число моментов, оставшихся для демонстрации монополистом своей «жесткости»; таким же образом мы получаем, что если $k(\delta)=n$, то новичок не входит (а монополист непременно сражается) для всех $t > n/K$. Устремляя K к бесконечности, мы видим, что новичок не входит до «самого последнего мгновения».

Вдохновляясь этим предельным результатом, рассмотрим теперь «случай непрерывного времени» для описанной выше игры, проводимой на отрезке $[T, 0]$. В любой момент $t \in [T, 0]$ новичок выбирает: входить или не входить, а монополист выбирает: принять входящего или сражаться с ним. Реализация стратегии новичка формализуется (измеримой) функцией e: $[T, 0] \to \{0, 1\}$, где $e(t)=1$ означает, что в момент t новичок входит. Реализация стратегии монополиста формализуется (измеримой) функцией f: $[T, 0] \to \{0, 1\}$, где $f(t)=1$ означает, что в момент t монополист сражается. (Поскольку игра «с обратной связью», чистые стратегии должны являть собой пару таких функций **e** и **f**, где $\mathbf{e}(t)$ — $F\{(\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s)), s < t\}$-измерима и $\mathbf{f}(t)$ — $F\{\mathbf{f}(s), s < t; \mathbf{e}(s), s \le t\}$-измерима. Мы не станем вдаваться здесь в уточнения, доверяя способности читателя формализовать то, что отсюда следует.) Для заданных реализаций e и f итоговые выигрыши каждой из сторон определяются длительностью времени, в течение которого либо не было вхождений $(e(t) = 0)$, либо вхождение встречалось сражением $(e(t) = 1, f(t) = 1)$, либо вхождение встречалось принятием $(e(t) = 1, f(t) = 0)$, а также заданием соответствующих моментальных выигрышей. Например, если λ — мера Лебега, то итоговый выигрыш слабого монополиста равен

$$\lambda\{e(t) = 0\} \cdot a - \lambda\{e(t) = 1, f(t) = 1\}.$$

В данной игре равновесие требует от новичка, чтобы он воздерживался от входа, пока монополист не принимает, и постоянно входил после любого замеченного принятия; от сильного монополиста — чтобы он сражался при каждом вхождении; от слабого монополиста — чтобы он сражался, если еще не производил принятий, и всегда принимал новичка после однократного принятия. Читатель легко может проверить, что это — равновесие. Далее, если «по ошибке» новичок входит до момента времени **0**, слабый монополист должен быть готов сражаться: принятие сберегает «текущую» единицу, но влечет за собой вхождения в течение всей оставшейся игры и существенные потери, перевешивающие текущие выгоды.

(Читатель вправе отнестись к этому скептически. Перейдя к непрерывному времени, мы получили некоторые особенности (бесконечно повторяемой) суперигры. К примеру, приведенное выше равновесие «совершенно» даже при $\delta = 0$, как и в суперигре с $\delta = 0$. Но в случае $\delta = 0$ это равновесие не есть предел равновесного поведения в «дискретной-более-часто-повторяемой» игре. В случае $\delta > 0$ данное равновесие оправдывается именно тем, что является пределом дискретных равновесий. Мы вернемся к этому моменту после обсуждения случая двусторонней неопределенности.)

Теперь рассмотрим в непрерывном времени игру с неопределенностью у обеих сторон. Формулировка та же, что и раньше, но теперь (с самого начала) есть неопределенность выигрышей новичка, выражаемая функцией реализаций e и f. Мы ищем равновесие со следующими характеристиками:

(1) сильный монополист сражается всегда;

(2) сильный новичок входит всегда;

(3) в силу (1), если монополист когда-либо отказывается от сражения при входе (новичка), он проявляет свою слабость; после этого новичок всегда входит, а слабый монополист всегда принимает его;

(4) в силу (2), если новичок когда-либо отказывается от входа, он проявляет свою слабость; в предположении, что монополист до этого момента не проявил своей слабости, игра протекает так, как описано выше: слабый новичок до самого конца игры воздерживается от входа, а монополист всегда готов сражаться.

Как и в случае дискретного времени, равновесие с такими характеристиками может быть переформулировано в терминах «правил остановки» для слабых новичка и монополиста — каждый выбирает момент, в который «уступает», если противник до этого не уступил сам. Если новичок уступает первым (в момент t), реализуется сценарий (4) и слабый монополист получает до конца игры $a \cdot t$, а новичок получает 0. Если монополист уступает первым (в момент t), реализуется сценарий (3) и слабый новичок получает до конца игры $b \cdot t$, а монополист получает 0. До тех пор пока ни одна из сторон не уступает, в каждый из моментов времени слабый монополист получает -1, а слабый новичок соответственно получает $b-1$. Условие равновесия таково: для каждого из игроков момент остановки должен быть оптимален при заданных (а) распределении вероятностей выигрышей противника и (б) предположении, что сильный противник никогда не уступит. Это очень похоже на игру «война на истощение»; ср., например, [16] и [14]. Формально это эквивалентно аукциону при двух конкурирующих участниках, когда моменты остановки интерпретируются как заявки. Особенно полезным это замечание окажется впоследствии при обсуждении взаимосвязи случаев непрерывного и дискретного времени. (Мы признательны Полу Милгрому за ознакомление нас с игрой «война на истощение», а также за указание нам на значение для данной темы принадлежащей ему и Веберу статьи.)

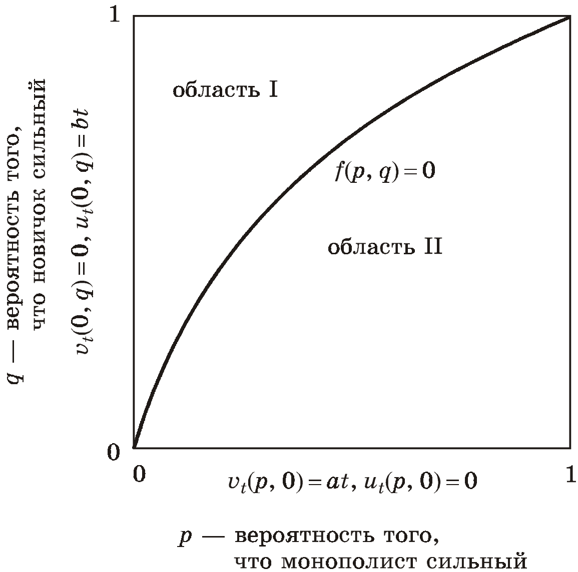

Рис. 5. Пространство состояний игры в непрерывном времени.

Проще и показательнее всего представить равновесие, используя схему, подобную представленной рис. 4. На рис. 5 указано «пространство состояний» данной игры — единичный квадрат, интерпретируемый точно так же, как и для рис. 4. Нижняя граница соответствует осведомленности монополиста о том, что новичок — слабый. На протяжении этой границы (за исключением крайней левой точки) функция выигрыша (с момента t) монополиста есть $v_t(p, 0) = at$, а функция выигрыша слабого новичка есть $u_t(p, 0) = 0$. На левой границе известно, что монополист — слабый, и (за исключением крайней нижней точки) $v_t(0, q) = 0$, $u_t(0, q) = bt$.

Природа равновесия в точности соответствует дискретному случаю: пространство состояний разделяется на две области кривой, проходящей через точки (0, 0) и (1, 1). Если, согласно начальным данным, мы находимся в области I, то игра начинается с обязательного вхождения новичка и случайного выбора (слабого) монополиста между сражением и немедленной капитуляцией. Этот случайный выбор таков, что в случае, если монополист сражается в момент T, новичок пересматривает свою оценку того, что монополист — сильный, оказываясь на кривой $f(p, q) = 0$. В области II уже (слабый) новичок делает случайный выбор между вхождением и немедленной капитуляцией; если он входит, монополист пересматривает свою оценку того, что новичок — сильный, поднимаясь в точку на кривой $f(p, q) = 0$. Итак, слабый монополист и слабый новичок «непрерывно» делают случайный выбор между продолжением сражения и капитуляцией и делают это так, что, пока они продолжают сражаться, байесовские переоценки каждой стороной того, что противник — сильный, сдвигают точку (p_t, q_t) по кривой в направлении $(1, 1)$. (Конечно, если та или иная сторона капитулирует, производится переход на соответствующую границу.) Если та или иная сторона — слабая, то начиная с некоторого момента $T^0 > 0$ одна из сторон с единичной вероятностью уступает; если обе стороны — сильные, в момент T^0 достигается точка $(1, 1)$, в которой мы и остаемся до момента $t = 0$.

Разница между данным равновесием и равновесием для случая дискретного времени (а также причина, по которой данное равновесие вычисляется куда легче) состоит в том, что кривая $f(p, q) = 0$ не меняется при изменении t в непрерывном времени. Это так, поскольку в непрерывном времени игра длительностью $T/2$ стратегически эквивалентна игре длительностью T при одинаковых начальных условиях (δ, γ). Все изменения сводятся к тому, что вдвое увеличивается скорость, но мы можем также считать, что игра проводится с прежней скоростью, но с половинными ставками. Величины уменьшаются вдвое, но все остальное — неизменно.

Теперь мы осуществляем эвристическое выведение равновесия, полагая, что последнее имеет описанную выше форму. Заметим для начала, что вдоль кривой оценочные функции для обеих сторон должны быть тождественно равны нулю, поскольку (согласно гипотезе) обе стороны непрерывно делают случайный выбор и одним из следствий этого является переход в точки, где оценочные функции равны нулю. (Для новичка эти точки — на нижней границе, для монополиста — на левой.) Пусть $\pi_t(p_t, q_t)$ и $\rho_t(p_t, q_t)$ — функции оценки шансов того, что случайный выбор, делаемый в момент

t соответственно слабым монополистом и слабым новичком, приводит в точку (p_t, q_t) кривой. Тогда для интервала времени $(t, t-h)$ вероятность того, что монополист уступит, равна (с точностью до $o(h)$) $(1-p_t)\cdot \pi_t(p_t, q_t)\cdot h$; вероятность того, что новичок уступит, равна $(1-q_t)\cdot \rho_t(p_t, q_t)\cdot h$. При соответствующих предположениях о гладкости функций, для постоянства (равенства нулю) функций оценки вдоль кривой необходимо, чтобы ожидаемое изменение выигрыша слабого монополиста было равно нулю. На языке бесконечно малых величин это означает

$$-h + [(1-q_t)\cdot \rho_t(p_t, q_t)\cdot h]\cdot [at] = o(h).$$

Таким образом, непосредственные издержки $-h$ продолжения монополистом блефа должны уравниваться большим последующим выигрышем at, умножаемым на небольшую вероятность $(1-q_t)\cdot p_t(p_t, q_t)\cdot h$ того, что новичок уступит. Аналогичное рассуждение дает для слабого новичка

$$(b-1)\cdot h + [(1-p_t)\cdot \pi_t(p_t, q_t)\cdot h]\cdot [bt] = o(h).$$

Деля на h и переходя к пределу, получаем

$$\rho_t(p_t, q_t) = 1/(at\cdot(1-q_t)) \text{ и } \pi_t(p_t, q_t) = (1-b)/(bt\cdot(1-p_t)).$$

Теперь рассмотрим изменение апостериорных вероятностей p_t и q_t. Для монополиста совместное распределение вероятностей того, что новичок — слабый (сильный), и того, что новичок уступит (не уступит) в течение интервала времени $(t, t-h)$, задается (с точностью до $o(h)$) табл. 2. Таким образом, вероятность того, что новичок — сильный, при условии, что он не уступал на промежутке $(t, t-h)$, есть

$$q_{t-h} = q_t/[1-(1-q_t)\cdot \rho_t(p_t, q_t)\cdot h].$$

Таблица 2

	слабый	сильный	
уступать	$(1-q_t)\cdot p_t(p_t, q_t)\cdot h$	0	$(1-q_t)\cdot p_t(p_t, q_t)\cdot h$
не уступать	$(1-q_t)\cdot(1-p_t(p_t, q_t)\cdot h)$	q_t	$1-(1-q_t)\cdot p_t(p_t, q_t)\cdot h$
	$(1-q_t)$	q_t	

Пренебрегая членами порядка $o(h)$,

$$(q_t - q_{t-h})/h = -q_t \cdot (1 - q_t) \cdot \rho_t(p_t, q_t).$$

При переходе к пределу это дает $dq_t/dt = (q_t - q_t^2) \cdot \rho_t(p_t, q_t) = -q_t/(at)$. Аналогично получается $dp_t/dt = -p_t \cdot (1 - b)/(bt)$. Таким образом, вдоль кривой должно быть

$$dq_t/dp_t = (q_t \cdot b)/((1 - b) \cdot a \cdot p_t).$$

Поскольку последнее соотношение не зависит от t, его легко интегрировать, получая $q_t = k \cdot (p_t)^c$, где k — константа интегрирования, а $c = b/((1 - b) \cdot a)$. Чтобы точка (1, 1) принадлежала кривой, следует положить $k = 1$. Итак, кривая задается уравнением

$$f(p, q) \equiv q^{(1-b)/b} - p^{1/a} = 0.$$

(Подчеркнем, что k выбрано так, чтобы точка (1, 1) принадлежала кривой. В дальнейшем это окажется важным.)

Можно также решить уравнения для q_t и p_t. Интегрирование $dq_t/dt = -q_t/(at)$ приводит к $q_t = k' \cdot t^{-1/a}$. Аналогично $p_t = k'' \cdot t^{-(1-b)/b}$. Константы k' и k'' определяются начальными условиями. Положим, для примера, что сначала мы находились в точке (δ, γ) априорных вероятностей, лежащей в области I. Тогда сначала последует случайный выбор хода слабым новичком, приводящий к апостериорной вероятности $q_T = \delta^c$, если новичок не входит. Решая относительно k', получаем $k' = \delta^c T^{1/a}$. Аналогично получаем $k'' = \delta T^{(1-b)/b}$. Таким образом,

$$p_t = \delta \cdot (T/t)^{(1-b)/b} \text{ и } q_t = \delta^c \cdot (T/t)^{1/a}.$$

Отметим, что это ведет к $p_t = 1$ и $q_t = 1$ при $t = T\delta^{ac} = T\delta^{b/(1-b)}$. (Конечно, p_t и q_t обращаются в единицу одновременно, поскольку кривая была нормализована так, чтобы проходить через точку (1, 1).) Следует отметить, что в данном равновесии точка апостериорных вероятностей (1, 1) достигается в момент T^0, строго больший 0 и строго меньший T (при $\delta \neq 0$ или $\delta \neq 1$), если до тех пор ни один из игроков не уступил. Разумеется, точка (1, 1) достигается, только если, с единичной вероятностью, как слабый монополист, так и слабый новичок должны уступить. Итак, согласно данному равновесию, если оба игрока — сильные, они узнают это друг о друге еще до завершения игры. Если начальная точка (δ, γ) находится в области II, соответствующий момент T^0 также равен $T\delta^{b/(1-b)}$. В сравнении с предшествующим случаем формулы несколько изменяются, но качественные выводы — те же самые.

Основательно ли это эвристическое выведение? Иначе говоря, действительно ли мы имеем равновесие? Неуверенность вызывается двумя обстоятельствами. Во-первых, эвристические доводы, приводимые нами, требовали в некоторых пунктах регулярности функций p_t и r_t. Для функций, дифференцировавшихся нами, читатель может провести эти рассуждения совершенно строго. Во-вторых (и это более существенно), полученные для функций p_t и r_t условия были необходимыми *для постоянства* оценочных функций вдоль кривой. Для равновесия нам требуется большее: вдоль кривой оценочные функции должны быть *тождественно равными нулю*. Вот тут-то и вступает в действие ранее проведенная нормализация кривой: в точке $(1, 1)$ оценочные функции для каждого слабого игрока равны нулю, поскольку каждый уверен, что противник — сильный. С другой стороны, предположим (если в какой-то момент кривая достигнута), что та или иная сторона — слабая и что она решает *не* делать случайного выбора, а просто дожидаться уступки противника. Условия, данные нам функциями p_t и r_t, обеспечивают, что, пока это так, изменение ожидаемого выигрыша равно нулю. (Тем, кто хочет выразить это математически, рекомендуем применить формулу Дынкина к соответствующему обобщенному пуассоновскому процессу.) И если ничего не произошло, в момент T^0 пережидающий игрок *узнаёт*, что его противник — сильный, и должен немедленно уступить, получая нулевой выигрыш. Таким образом, на протяжении всей кривой оценка равна нулю. Этого при аккуратных выкладках достаточно для доказательства того, что мы имеем равновесие.

В заключение добавим два замечания об этом равновесии. Во-первых, оценочные функции для каждого (слабого) игрока легко вычислимы. В области II $u_T(\delta, \gamma) = 0$ и $v_T(\delta, \gamma) = \left[(\delta^c - \gamma)/\delta^c\right] \cdot aT$; в области I $u_T(\delta, \gamma) = \left[(\gamma^{1/c} - \delta)/\gamma^{1/c}\right] \cdot bT$ и $v_T(\delta, \gamma) = 0$. Таким образом, они просто линейно интерполируют нулевые оценки вдоль кривой и оценки вдоль нижней (для области II) либо левой (для области I) границы.

Во-вторых, ранее мы отмечали, что игра в непрерывном времени может привести к равновесиям, не являющимся пределами равновесий игр в дискретном времени. Хотелось бы убедиться, что представленное равновесие действительно есть предел того равновесия в дискретном времени, с которого мы начинали данный раздел. Мы не проверяли всех деталей, но полностью уверены, что это так. Чтобы убедиться в этом, повторим, что игра в дискретном времени может быть представлена как задача оптимальной остановки, в которой, например, новичок может останавливаться только в моменты T, $(T \cdot K - 1)/K$, ..., $1/K$, а монополист — только в моменты $T - 1/(2K)$, $(T \cdot K - 3/2)/K$, ..., $1/(2K)$. В задаче с непрерывным временем остановки возможны в любой из моментов $(n + 1)$. Для задачи с односторонней неопределенностью перейти от дискретного к непрерывному времени легко, поскольку нам известно, что для каждого из отдельных моментов времени значения «остановок» сходятся. При устремлении K к бесконечности множества возможных стратегий также сходятся и с помощью методов Милгрома и Вебера [14] доказывается сходимость равновесий дискретных игр к равновесиям игр в непрерывном времени. (В самом деле, Пол Милгром показал нам, что, рассматривая игру в непрерывном времени как игру в распределенных стратегиях, вывести описанное выше равновесие очень просто.)

Прежде чем завершить этот раздел, заметим также, что это лишь одна из возможных трактовок проблемы двусторонней неопределенности. Мы могли бы посмотреть, что происходит, когда монополист играет против последовательно появляющихся различных новичков (каждый из которых играет только один раз), если монополист не знает в точности выигрышей новичков. Для такой игры мы должны были бы определить характер зависимости между выигрышами новичков: они должны быть либо идентичными (с точки зрения монополиста — совершенно коррелироваными), либо независимыми и одинаково распределенными, либо чем-то промежуточным относительно этих двух крайностей. Оба этих крайних случая детально анализируются в нашей работе [8]. Наиболее интересно сравнение данной выше модели со случаем, когда новички идентичны и играют всего по одному разу. Первый новичок почти всегда «говорит правду», отказываясь входить, если он слабый, а слабый монополист со значительной вероятностью будет сражаться при нескольких первых вхождениях, чтобы слабые новички оставались «честными». Это показывает, что для реализации рассмотренной выше игры «петушиный бой» требуется *как* двусторонняя неопределенность, *так и* потенциальная выгодность поддержания репутации для каждой из сторон. Когда только одна из сторон намерена участвовать в игре на многих шагах, другая сторона слабо мотивирована к притворству и не склонна бороться за приобретение (поддержание) репутации. (Существует иная интересная интерпретация проблемы, когда есть популяция «новичков» и популяция «монополистов». На каждом шаге случайным образом выбирается один «новичок» и один «монополист» в духе работ Розенталя [18] и Розенталя и Ландау [19]. Мы не анализировали поставленную таким образом задачу.)

5. Обсуждение

Мы представили эти простые примеры, чтобы формально продемонстрировать силу «репутации» в конечно повторяемых играх. Значимость репутации в реальной жизни имеет широкое признание: напомним в рамках теории организации промышленности цитату из книги Шерера (раздел 1). Отметим важность репутации для контрактных и трудовых отношений, для практики найма, для «доброго имени» продукции фирмы, для сохранения картелей (или для игры «дилемма заключенных»), для международной дипломатической практики. В каждом из этих случаев можно воспользоваться нашей аналитической конструкцией и получить следующие выводы: если ситуация повторяема, так что поддержание или приобретение репутации имеет значение, и если есть неопределенность по поводу мотиваций одного или нескольких игроков, то эта неопределенность существенно влияет на течение игры. Для этого достаточно не слишком большой неопределенности. Сила воздействия чьей-либо репутации зависит от природы противников, в особенности от того, стараются ли они создать репутацию себе самим.

Интерпретации феноменов, порождающих «репутации», не являются совершенной новостью в литературе по формальной теории игр. По большей части они характерны для литературы по суперииграм, когда одношаговая игра повторяется бесконечно часто или когда постоянно имеется достаточно большая вероятность еще хотя бы одного повторения (показательный пример — работа Рубинштейна [20]). Действительно, Дибвиг и Спатт [6] явно используют толкование репутации в контексте суперигр. Новизна настоящей статьи (а также статьи Милгрома и Робертса [13]) — в указании на то, что, при весьма небольшом несовершенстве информации, эти эффекты возникают и в конечно повторяемых играх. Сложно сравнивать эти два подхода, но проблема множественности равновесий, являющаяся бичом работ по суперииграм, безболезненно и существенно упрощается для игр, описанных здесь. К тому же, как нам кажется, это довольно любопытные модели «войн», позволяющие выяснять, какое же из равновесий возобладает. При всем том мы очень далеки от готовности провести всеобъемлющее сравнение двух подходов, мы лишь утверждаем, что это представляется нам интересным альтернативным способом получения эффектов репутации.

Стоит повторить здесь краткое замечание, сделанное в разделе 3. Для удобства мы постулировали неопределенность простейшего свойства: игроки не знают точно выигрышей своих партнеров. Но почти к тому же самому ведет и ситуация, когда каждый осведомлен о выигрышах других игроков, но не уверен, знают ли о его осведомленности другие. Чтобы эффекты репутации исчезли, знание о выигрышах должно быть, пользуясь терминологией теории игр, всеобщим. (В поддержку такой точки зрения Милгром и Робертс [13] приводят формальные модели.) А это очень сильное допущение с точки зрения приложений к реальности.

Читатель может возразить, что для получения эффекта репутации мы «перегрузили лодку». Ведь в нашей модели репутация легко разбивалась вдребезги, что делало ее тем более ценной; существуют по крайней мере два типа игроков с обеих сторон, и каждый игрок имеет всего два возможных действия. Что до первого обвинения, то мы признаем себя виновными. По-видимому, сила репутации положительно связана с этой неустойчивостью. Что до второго, в моделях Милгрома и Робертса [13] число типов монополистов измеряется континуумами, посему второе не является решающим для наших выводов. Касательно третьего, мы признаемся, что это позволило нам получить «объединяющее равновесие» (заимствуя термин из литературы по страхованию), в котором игрок одного типа успешно подражает игроку другого типа. Анализ Милгрома и Робертса [12] показывает, что при континууме возможных действий можно получать также и отделяющие равновесия для подобных моделей. Но это не всегда так: Кроуфорд и Собел [3] исследуют класс моделей с континуумом возможных действий, где некоторое объединение необходимо для любого из равновесий. Допущение только двух возможных действий облегчало нам работу, но мы не считаем это ключевым моментом.

Из наших простых примеров очевидно, что даже очень небольшая неопределенность «дестабилизирует» теоретический анализ игр с достаточно большим числом шагов. Читатель может подозревать большее: умело выбирая природу неопределенности (точнее — при помощи этого), для любой игры можно вырваться за рамки стандартного теоретического анализа. В настоящий момент мы не высказываем формального утверждения подобного рода, но мы полностью разделяем эти подозрения. И если это действительно так, стандартный теоретико-игровой анализ сводится к тому, чтобы избавляться от изначальной неполноты информации. Однако в *теории* игр нет ничего, что помогало бы делать это.

Это подкрепляет точку зрения Розенталя [17]. Розенталь исследовал обычную игру «сеть магазинов» и сделал замечание, с которого мы начинали: парадоксальный результат исследования Зельтена есть следствие полноты и совершенства информации в используемой Зельтеном редакции. При более реалистичной формулировке игры интуитивно ожидаемый исход подтверждается и теоретико-игровым анализом. Розенталь не приводит такого анализа, сомневаясь в возможности аналитического решения задачи в соответствующей постановке. Вместо этого он предлагает анализ с использованием парадигмы принятия решений, где делается попытка *непосредственно* оценить, как новички будут отвечать на то, что монополист сражается в начальных раундах. Такой анализ может, конечно, вести к интуитивно ожидаемому исходу, что и показано Макгрегором [11]. Однако, как отмечает Розенталь, слабость этого подхода — в *ad hoc*[4] оценках поведения новичков. Мы же проводили теоретико-игровой анализ для *единой* очень простой редакции игры с неполной информацией и тем самым избежали *ad hoc* предположений о поведении новичков. Но мы сделали *ad hoc* предположения об их информированности и обнаружили, что малые изменения этих предположений значительно влияют на течение игры. Таким образом, анализ подобных ситуаций может (на какой-то ступени) требовать предположений *ad hoc*.

В настоящей статье мы представили модели, демонстрирующие эффект репутации столь просто и столь значительно, сколь это возможно. В силу этого мы не пытались моделировать реалистические ситуации организации промышленности или иные экономические обстоятельства. (Милгром и Робертс [13] восполняют эту нехватку: они больше концентрируют внимание на приложении соответствующих идей.) Чтобы продемонстрировать, как эти идеи могут прилагаться к действительности, мы заканчиваем двумя примерами.

Первый относится к проблеме предотвращение входа, особенно в связи со статьями Спенса [26] и Диксита [4, 5]. В этих статьях принимается базовая структура Бэйна [1] и Силоса-Лабини [27] и спрашивается: что до принятия новичком решения может делать монополист, дабы хищническое поведение становилось оптимальным в коротком периоде? (Даваемые ответы: избыточные мощности, торговые сети и т. д.) Значимость этого вопроса в том, что *угроза* хищнического поведения правдоподобна, только когда хищничество является *ex post* оптимальным ответом и монополист должен вести себя именно так с целью предотвращения вхождений. В нашей же модели предлагается (и это может быть продемонстрировано формально) вот что: при повторении игровых ситуаций дей-

[4] Специальных, относящихся к данному случаю (*лат.*); здесь: меняющихся от новичка к новичку. — *Прим. ред.*

ствия монополиста не обязаны делать хищничество *ex post* оптимальным; они должны делать хищничество *возможным* и, пожалуй, увеличивать оценку новичками вероятности того, что хищничество *ex post* оптимально для монополиста. Если целью является предотвращение входа, важной может быть именно внешняя видимость выгодности хищнического поведения, а не его *ex post* оптимальность.

Во втором случае имеется монопольный производитель капитальных благ длительного использования и по тем или иным причинам монополист не может создать рынок аренды оборудования, а вынужден осуществлять прямые продажи. Для многопериодной ситуации, в предположении что монополист проводит последовательную оптимизацию, это может уменьшать рыночную власть монополиста. (См. [2] и [25].) Если производство монополиста характеризуется ограничениями по мощности, для монополиста часто *предпочтительнее* жесткие ограничения, поскольку они охраняют монополиста от «перепроизводства». Следовательно, если информация об ограничениях — частное достояние монополиста, то монополист с незадействованными мощностями успешно может (в равновесии) маскироваться под имеющего более жесткое ограничение, отчасти возмещая этим уменьшение своей рыночной власти. В сущности, если число периодов стремится к бесконечности (что сближается с редакцией игры в непрерывном времени), то монополист с успехом может приобретать репутацию «обладающего малой мощностью даже если его мощности велики (с вероятностью, стремящейся к единице). Соответствующий этому пример приводится Мурти [15].

Литература

1. *Bain J. S.* Barriers to new competition. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1956.
2. *Bulow J.* Durable goods monopolists // Journal of Political Economy. 1982. Vol. 90. P. 314–332.
3. *Crawford V.*, *Sobel J.* Strategic information transmission // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 1431–1452.
4. *Dixit A.* A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers // Bell Journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 20–32.

5. *Dixit A.* The role of investment in entry-deterrence // Economic Journal. 1980. Vol. 90. P. 95–106. (См. данное издание: *Диксит А.* Роль инвестиций в предотвращении входа. — *Прим. ред.*)
6. *Dybvig P.*, *Spatt C.* Does it pay to maintain a reputation? // Financial Center Memorandum N 32. Princeton University. 1980.
7. *Harsanyi J.* Games with incomplete information played by Bayesian players // Management Science. 1967–1968. Vol. 14. Parts I–III. P. 159–182, 320–334, 486–502.
8. *Kreps D.*, *Wilson R.* On the chain-store paradox and predation: reputation for toughness. Stanford University Graduate School of Business Research Paper, 1981. N 551.
9. *Kreps D.*, *Wilson R.* Sequential equilibria // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 863–894.
10. *Kuhn H.* Extensive games and the problem of information // Contributions to the Theory of Games (H. Kuhn and A. Tucker, Eds.). Princeton University Press. 1953. Vol. 2. P. 193–216.
11. *Macgregor M.* A resolution of the chain-store paradox. University of California at Berkeley, mimeo, 1979.
12. *Milgrom P.*, *Roberts J.* Limit pricing and entry under incomplete information: an equilibrium analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 443–460.
13. *Milgrom P.*, *Roberts J.* Predation, reputation, and entry deterrence // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. P. 280–312.
14. *Milgrom P.*, *Weber R.* Distributional strategies for games with incomplete information // Mathematical Methods of Operations Research. 1980. Vol. 10. P. 619–631.
15. *Moorthy S.* The Pablo Picasso problem. Stanford University Graduate School of Business, mimeo, 1980.
16. *Riley J.* Strong evolutionary equilibria and the war of attrition // Journal of Theoretical Biology. 1980. Vol. 82.
17. *Rosenthal R. W.* Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox // Journal of Economic Theory. 1981. Vol. 25. P. 92–100.
18. *Rosenthal R. W.* Sequences of games with varying opponents // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 1353–1366.
19. *Rosenthal R. W. Landau H. J.* A game-theoretic analysis of bargaining with reputations // Journal of Mathematical Psychology. 1979. Vol. 20. P. 233–255.
20. *Rubinstein A.* Strong perfect equilibrium in supergames // International Journal of Game Theory. 1979. Vol. 9. P. 1–12.
21. *Scherer F.* Industrial market structure and economic performance. 2nd ed. Chicago : Rand-McNally College Publishing Company, 1980.

(Русский перевод: *Шерер Ф. М.*, *Росс Д*. Структура отраслевых рынков. М.: Инфра-М, 1997. — *Прим. ред.*)
22. *Selten R.* Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit // Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft. 1965. Vol. 12. S. 301–324.
23. *Selten R.* Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games // International Journal of Game Theory. 1975. Vol. 4. P. 25–55.
24. *Selten R.* The chain-store paradox // Theory and Decision. 1978. Vol. 9. P. 127–159.
25. *Stokey N.* Self-fulfilling expectations, rational expectations, and durable goods pricing. Northwestern University, mimeo, 1979.
26. *Spence A. M.* Entry, capacity, investment and oligopolistic pricing // Bell Journal of Economics. 1977. Vol. 8. P. 534–544. (См. данное издание: *Спенс М*. Вход, мощность, инвестиции и олигополистическое ценообразование. — *Прим. ред.*)
27. *Sylos-Labini P.* Oligopoly and technical progress. Transl. E. Henderson. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1962.